

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

*На правах рукописи*



БАБАЯН Михаил Кароевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ ПРОЦЕДУРЫ  
КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА НА ОСНОВЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ  
ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор Бугаев Ю. В.

Воронеж – 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРОЦЕДУР КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА И МЕТОДОВ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ .....	9
1.1. Задачи выбора на множестве альтернатив, необозримом для ЛПР .....	9
1.2. Использование процедур коллективного выбора в сужении множества Парето .....	17
1.3. Метод экстраполяции экспертных оценок .....	21
1.4. Вероятностный метод анализа процедур коллективного выбора .....	31
1.5. Выводы. Цель и задачи исследования .....	38
ГЛАВА 2. АДАПТАЦИЯ ПРОЦЕДУРЫ ТЕРСТОУНА-МОСТЕЛЛЕРА К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ НА РАЗНОСТНО-КЛАССИФИКАЦИОННОЙ ШКАЛЕ .....	41
2.1. Проблемы применения разностно-классификационной шкалы .....	41
2.1.1. Шкалы экспертного оценивания, используемые в МЭЭО .....	41
2.1.2. Проблема косвенных и спорных экспертных предпочтений .....	43
2.2. Теоретическое обоснование применения разностно-классификационной шкалы .....	46
2.3. Проверка индивидуальных экспертных предпочтений на непротиворечивость и допустимость .....	52
2.4. Описание модификации процедуры Терстоуна-Мостеллера для разностно-классификационной шкалы .....	60
2.5. Выводы по главе .....	67
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ И СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МОДЕЛИ ВЫБОРА НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ ТЕРСТОУНА-МОСТЕЛЛЕРА .....	68
3.1. Использование нелинейной процедуры Терстоуна-Мостеллера .....	68
3.2. Условия конечности решения в методе экстраполяции экспертных оценок .....	74
3.3. Комбинированный алгоритм коллективного выбора .....	83

3.4. Исследование состоятельности оценок, полученных модифицированной процедурой Терстоуна-Мостеллера .....	90
3.5. Описание комбинированного алгоритма на основе адаптивной процедуры Терстоуна-Мостеллера .....	94
3.6. Выводы по главе.....	100
ГЛАВА 4. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ .....	101
4.1. Описание специального программного обеспечения .....	101
4.2. Вычислительные эксперименты по анализу адаптивной процедуры .....	105
4.2.1. Решение практической задачи.....	105
4.2.2. Иллюстративные примеры применения адаптивной процедуры выбора на основе МЭЭО .....	109
4.2.3. Вероятностный анализ адаптивной процедуры выбора .....	118
4.3. Выводы по главе.....	135
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	136
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	138
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	148
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....	161
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 .....	174
ПРИЛОЖЕНИЕ 4 .....	181
ПРИЛОЖЕНИЕ 5 .....	182
ПРИЛОЖЕНИЕ 6 .....	185

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность проблемы.** Значительный объём финансовых ресурсов, инвестируемых государством в сферу проектирования и реализации современных инновационных производств и наукоёмких технологий, требует рационального использования средств, которое во многом достигается за счёт оптимизации структуры таких производств, характеризующейся множеством взаимосвязанных факторов. Среди внушительного числа решаемых при этом задач особую нишу занимают проблемы многокритериального выбора и принятия решений, которые возникают на всем протяжении жизненного цикла любой сложной системы.

При решении задачи выбора на множестве недоминируемых альтернатив (множестве Парето) часто возникают ситуации, когда количество исходных вариантов достаточно велико для того, чтобы можно было непосредственно применять к этому набору вариантов какой-либо известный механизм выбора. Вследствие чего, возникает фундаментальная научно-практическая проблема сужения множества альтернатив, необозримого для лица, принимающего решения (ЛПР), до приемлемых размеров.

Среди известных на сегодняшний день подходов к решению указанной проблемы следует отметить: выбор на основе обобщённого критерия (Борда Ж., Саати Т. Л., Кини Р., Райфа Х., Крылов А. Н., Ларичев О. И.); выбор с применением «искусственного» отношения предпочтения (Рой Б., Бранс Дж.); человеко-машинные процедуры выбора (Лотов А. В.); использование свойств отношения предпочтения ЛПР (Подиновский В. В.); сужение множества Парето при помощи «квантов информации» (Ногин В. Д.).

Главный недостаток вышеперечисленных способов, как и абсолютного большинства известных к настоящему времени подходов к сужению парето-оптимального множества, связан с необходимостью вовлечения в процесс сравнения и оценки всего исходного набора альтернатив.

Принципиально иной подход содержится в методе экстраполяции экспертных оценок (МЭЭО). Он был предложен как способ генерации формального правила упорядочения альтернативных решений, несравнимых по безусловному критерию предпочтения (Пустыльник Е. И., Сысоев

В. В.). Этот способ ранжирования альтернатив относится к группе методов, основанных на аппроксимации функции полезности. Согласно МЭЭО на основе сравнения вариантов из небольшой обучающей выборки (обозримой для ЛПР) определяются неизвестные коэффициенты функции полезности, которые затем экстраполируются на всё рассматриваемое множество альтернатив. На практике при решении сложных задач выбора, как правило, участвует группа экспертов. На основе подхода экстраполяции экспертных оценок была разработана процедура голосования, использующая метод максимального правдоподобия (ММП-процедура) и применяемая при выборе на необозримом для ЛПР множестве альтернатив.

В дальнейшем выяснилось, что для экстраполяции можно использовать и некоторые другие известные процедуры посредством их небольшой модификации. В связи с этим сложилась настоятельная потребность проведения научных исследований по анализу возможности реализации подхода экстраполяции различными методами с целью создания автоматизированной системы поддержки принятия решений, которая позволит в дальнейшем находить процедуру выбора на необозримом для ЛПР множестве альтернатив, наиболее целесообразную для конкретных условий.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом государственных научно-исследовательских работ по теме «Математическое и компьютерное моделирование в задачах проектирования и оптимизации функционирования информационных технологических систем» (ГК № 01.2006.06298), а также в рамках гранта РФФИ № 14-01-00653-А по теме «Разработка и исследование процедур коллективного выбора на необозримом для ЛПР множестве альтернатив».

**Цель работы:** разработка и исследование модели коллективного выбора, использующей различные ранжирующие шкалы, и построение на её основе адаптивной процедуры улучшенной точности.

Для достижения цели поставлены **следующие задачи:**

1. Поиск необходимых и достаточных условий устойчивости статистических оценок полезности альтернатив при заданном профиле инди-

видуальных предпочтений в процедурах коллективного выбора, основанных на МЭЭО.

2. Выяснение условий применимости разностно-классификационной шкалы экспертного оценивания в процедурах экстраполяции экспертных оценок.

3. Построение и исследование адаптивной процедуры коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок.

4. Разработка комплекса программ, реализующего модели и методы анализа и синтеза процедур коллективного выбора.

**Объектом исследования** являются модели и процедуры коллективного выбора.

**Предметом исследования** являются модели и методы анализа и синтеза процедур коллективного выбора.

**Методы исследования.** В диссертационном исследовании использованы методы теории вероятностей, математической статистики, комбинаторного анализа, теории графов. Общей методологической основой является системный подход.

**Тематика работы** соответствует п. 1, 2, 3, 4 паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**Достоверность научных результатов.** Научные положения и теоретические выводы обоснованы корректным использованием выбранного математического аппарата и подтверждены результатами вычислительного эксперимента.

**Научная новизна** работы состоит в следующем.

1. Сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие конечности решения в процедурах коллективного выбора МЭЭО-ММП и Терстоуна-Мостеллера при заданном профиле экспертных предпочтений на порядковой шкале.

2. Разработана и исследована модель выбора на основе модифицированной процедуры Терстоуна-Мостеллера, отличающейся возможностью осуществлять коллективный выбор при экспертизе на разностно-

классификационной шкале, являющейся более сильной по сравнению с используемой ранее порядковой шкалой.

3. Доказана состоятельность статистических оценок, полученных модифицированной процедурой Терстоуна-Мостеллера.

4. Разработан, обоснован и протестирован эффективный вычислительный метод нахождения оценок полезностей альтернатив, отличающийся использованием разностно-классификационной шкалы и наличием блока адаптации, позволяющего в зависимости от степени согласованности мнений в профиле экспертных ранжирований выбирать наиболее эффективную процедуру коллективного выбора.

**Теоретическая значимость** состоит в развитии моделей и методов принятия коллективного решения в условиях необозримого для ЛПР множества альтернатив. Выводы, полученные в диссертации, могут быть использованы в качестве основы для дальнейших исследований в области моделирования автоматизированной СППР, позволяющей использовать вариант коллективного выбора, наиболее целесообразный для конкретных условий.

**Практическая значимость работы.** Разработанные численные методы и алгоритмы реализованы в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов, который также можно использовать для осуществления коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок при решении управленческих задач в различных сферах науки и производства. Достоверность и полнота проведённых исследований подтверждена результатами вычислительных экспериментов (в частности, на примере решения многокритериальной задачи выбора наилучшей структуры линии фотолитографии с реальными исходными данными).

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- модификация модели Терстоуна-Мостеллера для коллективного выбора при экспертизе на РК-шкале;
- теоретические положения относительно необходимых и достаточных условий существования конечных решений при заданном профиле предпочтений в процедурах коллективного выбора, основанных на МЭЭО;
- метод анализа профиля индивидуальных предпочтений на порядко-

вой шкале на устойчивость решений, основанный на проверке связности графа экспертного упорядочения;

– численный метод нахождения оценок полезностей альтернатив, отличающийся использованием РК-шкалы и наличием блока адаптации, позволяющего в зависимости от степени согласованности мнений в профиле экспертных ранжирований выбирать наиболее эффективную процедуру коллективного выбора;

– программный комплекс, реализующий предложенные модели и методы коллективного выбора на основе МЭЭО.

**Реализация и внедрение результатов работы.** Разработанный программный продукт «Адаптивная система поддержки принятия решений на основе МЭЭО» используется в практической деятельности на предприятии по производствупельменей и полуфабрикатов КФХ «Борть» (акт внедрения от «11» июня 2015 года).

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались: на международных научных конференциях «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-26» (г. Н. Новгород, 2013 г.), «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-27» (г. Тамбов, 2014 г.); на международной научно-практической конференции «Системный анализ и моделирование процессов управления качеством в нанобиотехнологиях» (г. Воронеж, 2014 г.); на I и II международной научно-практической интернет-конференции «Моделирование энергоинформационных процессов» (г. Воронеж, 2012 г., 2013 г.); на отчетных научных конференциях ВГУИТ (г. Воронеж, 2013 г., 2014 г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ, из них 4 – в изданиях, рекомендуемых ВАК РФ, и получено одно свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 103 наименований. Основной текст изложен на 137 страницах без списка литературы. Работа содержит 7 таблиц, 22 рисунка. Объем приложений – 39 страниц.

## ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРОЦЕДУР КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА И МЕТОДОВ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

### 1.1. Задачи выбора на множестве альтернатив, необозримом для ЛПР

Принятие решений в профессиональном отношении представляет собой особый вид человеческой деятельности, состоящий в аргументированном выборе наилучшего (в том или ином смысле) варианта или нескольких наиболее предпочтительных вариантов из имеющихся альтернативных способов достижения поставленных целей.

При проектировании и создании высокотехнологичных производств особую сложность представляет проблема выбора их структуры, характеризующейся достаточно большим числом параметров и факторов. Ввиду чего качество структуры описывается некоторым множеством, как правило, конфликтующих между собой критериев оптимальности. В таких условиях возникает неопределённость в выборе, связанная с невозможностью найти решение, при котором достигался бы оптимум одновременно по всем критериям. При этом значительный объем финансирования, направленного на реализацию инновационных проектов, существенно повысил цену, которую приходится платить человечеству за недостаточно эффективные и обоснованные управленческие решения. Это в свою очередь, накладывает большую ответственность на руководящий персонал, перед которым возникает сложная задача многокритериального выбора. Как правило, затруднения, связанные с неполнотой и противоречивостью исходной информации, квалифицированный руководитель компенсирует своими знаниями, умением и интуицией. Вследствие чего, принятие решений в сложных ситуациях представляет собой своего рода творческий процесс, который, вообще говоря, далеко не всегда способен обеспечить поиск и выработку наиболее эффективного решения. В связи с этим особую важность представляет развитие научных методов и моделей теории принятия решений. Формально задачу выбора

(ЗВ) можно представить следующим образом [2, 42, 58, 77, 89, 90, 94, 99, 100]:

$$\text{ЗВ} = \langle \Theta, X, K, S, M \rangle,$$

где  $\Theta$  – формулировка задачи принятия решения, включающая в себя содержательное описание имеющейся проблемы, постановку конкретных целей (или цели), которые должны быть достигнуты, определение требований к окончательному виду результата;  $X = \{x, y, \dots\}$  – исходное дискретное множество допустимых вариантов (альтернатив) решения проблемы;  $K$  – вектор показателей (атрибутов, параметров) качества решений;  $S$  – структура на множестве  $X$  (представляет собой совокупность сведений о множестве  $X$  (в том числе информация, полученная от ЛПР), на основании которых производится оценка и сравнение альтернатив);  $M = \langle S, \pi \rangle$  – механизм выбора, который представляет собой формализованное описание (модель) того, как в соответствии со структурой  $S$ , применяя правило выбора  $\pi$ , выделить из предъявления  $X$  подмножество выбранных альтернатив  $Y$ ,  $Y \subseteq X$ . Требуется с учётом полученной структуры  $S$  синтезировать механизм выбора  $M$  на исходном множестве альтернатив  $X$ , качество которых оценивается вектором  $K$ .

Задача многокритериального выбора обусловлена многообразием достигаемых целей, а также необходимостью учёта разнородных свойств и характеристик сравниваемых объектов. Ввиду чего, в рамках такого механизма выбора структура  $S$  задаётся в виде  $n > 1$  отображений  $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$ , множества  $X$  на критериальную шкалу, то есть некоторую числовую ось, имеющую смысл «хуже - лучше». Иначе говоря, описывается вектор-функцией  $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ . Тогда правило выбора  $\pi$  есть ничто иное, как векторная экстремизация (для определённости максимизация) функции  $\varphi(x)$  на множестве  $X$ , которая сводится к выделению из предъявления  $X$  подмножества всех оптимальных (по Парето [64]) вариантов по векторному критерию  $\varphi$  (множества Парето):

$$\pi: x \in C(X) \Leftrightarrow (\forall y \in X \quad \forall j \quad x_j \geq y_j \wedge \exists j_0 \mid x_{j_0} > y_{j_0}).$$

Помимо экстремизации по Парето в задачах векторной оптимизации используются следующие принципы оптимальности: Слейтера [64]; доминантности [1];  $p$ -доминантности [25]; Джоффриона I (собственного превосходства) [80]; Джоффриона II (несобственного превосходства) [80]; лексикографии [63]; минимального риска [25]; мажоритарный [35] и т.д.

В [34] указано, что поведение ЛПР существенно определяется ограниченным объемом кратковременной памяти, и поэтому количество альтернативных вариантов, предъявляемых ему, а также число критериев, описывающих количественные и/или качественные характеристики альтернатив, должны отвечать возможностям человеческой системы переработки информации. Однако, при решении многокритериальной задачи выбора на множестве недоминируемых альтернатив (множестве Парето) в процессе проектирования и оптимизации сложных производственных систем количество рассматриваемых вариантов может быть слишком велико для того, чтобы эксперт / ЛПР смог непосредственно к этому набору применить какой-либо известный механизм выбора. Вследствие чего, возникает необходимость сужения множества Парето до обозримых для человека пределов.

В [52] приведены основные подходы к решению данной проблемы, известные к настоящему времени.

1. Выбор на основе обобщённого критерия. Ввиду наличия нескольких целевых функций векторно-оптимизационные механизмы выбора в процессе поиска «лучших» вариантов решения проблемы подразумевают применение некоторого обобщённого критерия (ОК), при формировании которого используется априорный и апостериорный подходы.

Априорные методы синтеза ОК стояли у истоков многокритериальной оптимизации, когда для устранения неопределённости использовались простейшие свёртки критериев. В литературе описываются следующие априорные принципы формирования ОК: принцип Нэша [57]; принцип домини-

рующего результата [40]; принцип Гурвица [40]; принцип главного критерия [19] с переводом остальных в разряд ограничений; минимум уклонения от идеальной точки по заданной норме, не использующей весов значимости критериев [10]; суммарная эффективность [24]. В настоящее время данный подход носит скорее теоретический характер и при решении реальных задач выбора практически не применяется.

В основе апостериорных способов формирования ОК лежит, прежде всего, понятие относительной важности критериев [68]. Из большого многообразия работ, посвящённых синтезу процедур оценки коэффициентов важности критериев следует отметить метод Уэя [103] и его модернизированный вариант [9], метод собственного вектора Саати [96], метод Коггера [78], метод остовного дерева Юшманова [75]. Значительному продвижению в повышении качества идентификации функции обобщенного критерия с весами важности, а также формализации понятия обобщенного критерия способствовали работы В. В. Подиновского [59, 60 – 62, 91].

Данный подход к решению проблемы сужения множества Парето достаточно прост в идейном отношении, что, несомненно, является его достоинством. Однако, с учётом современного уровня развития теории принятия многокритериальных решений, этот метод имеет существенные недостатки. Во-первых, значения весов  $\lambda_j$  частных критериев качества  $f_j(x)$  носят субъективный характер, так как эксперт или ЛПР, как правило, не в состоянии оценить и численно выразить в форме коэффициентов адекватную степень влияния отдельных критериев на окончательную оценку альтернативы  $x$  по обобщённому критерию  $F(f_1(x)...f_k(x))$ . Во-вторых, не всякое парето-оптимальное решение может быть получено в результате экстремизации обобщённого критерия с положительными (и даже неотрицательными) весами  $\lambda_j$ . На практике это означает наличие ситуации, когда некоторые парето-оптимальные варианты никогда не будут выбраны, какие бы неотрицательные веса эксперт не назначал [47], тогда как согласно принципу Эджворта-

Парето [45, 46, 51-56] выбранным может оказаться любой элемент из парето-оптимального множества. К методам, базирующимся на использовании обобщённого критерия, относятся процедуры многокритериальной теории полезности [32, 35, 79], согласно которой ОК строится в основном в аддитивно-мультипликативной форме, а также методы, относящиеся к целевому программированию [56,72, 82].

2. Выбор с применением «искусственного» отношения предпочтения. Группа методов (например, ELECTRE, MACSBETH [35,79]), использующих данный способ сужения множества Парето, базируется на принципе, согласно которому эксперту/ЛПР в качестве своего «личного» предпочтения предлагается выбрать то или иное бинарное отношение  $\succ$  из уже имеющегося в распоряжении исследователей набора.

Несомненным преимуществом использования «искусственного» отношения предпочтения является достаточно высокий уровень изученности свойств этого отношения. Среди основных недостатков данного подхода можно выделить следующие:

- несмотря на большой выбор и достаточную изученность «искусственных» отношений, на практике крайне редко встречаются ситуации, когда какое-либо из этих отношений полностью удовлетворяло бы запросам конкретного ЛПР;
- не обладающее достаточными познаниями в теории принятия решений ЛПР не в состоянии подобрать наиболее подходящее для него отношение предпочтения в связи с достаточно большим многообразием «искусственных» отношений и сложностью их задания;
- данный метод неэффективен в применении, когда количество парето-оптимальных вариантов необозримо для ЛПР.

3. Человеко-машинные процедуры выбора. К настоящему времени существует достаточно большое многообразие человеко-машинных (интерактивных) процедур. Принцип их работы сводится к выявлению у ЛПР на

каждом шаге (итерации) определённой информации, на основе которой строится последовательность точек, предел которой предлагается считать «наилучшим» решением.

К методам сужения множества Парето, использующим данный подход, относится ряд интерактивных методов (диалоговых карт решений, достижимых целей, разумных целей), основанных на визуализации множества Парето и использующих те или иные варианты приближения к идеальному вектору [81]. К существенному недостатку человеко-машинных процедур выбора можно отнести ненадёжность информации, полученной от ЛПР, ввиду чрезмерной сложности задаваемых ему вопросов. При этом накапливаемые на каждой итерации алгоритма неточности могут оказать значительное влияние на итоговый результат.

4. Использование свойств отношения предпочтения ЛПР. Применение данного подхода подразумевает сужение множества недоминируемых вариантов за счёт тех или иных требований, накладываемых на отношение предпочтения ЛПР. Например, если ЛПР осуществляет выбор на основе отношения строгого предпочтения, то минимальным требованием к такому типу отношений является асимметричность. Помимо асимметричности достаточно часто имеется какая-либо информация о свойствах отношения предпочтения ЛПР. К примеру, если сведения, поступающие от ЛПР, являются непротиворечивыми (т.е. ЛПР ведёт себя достаточно «разумно»), то отношение предпочтения предполагают транзитивным. В свою очередь, отношение предпочтения ЛПР может обладать свойством инвариантности.

Среди наиболее известных типов инвариантности стоит отметить: инвариантность относительно перестановок компонент векторных оценок; независимость по предпочтению [35, 36]; инвариантность относительно сдвига на произвольный вектор [7, 8, 41]; инвариантность относительно положительного линейного преобразования. Достоинством данного подхода является то, что любое дополнительное требование, накладываемое на отноше-

ние предпочтения ЛПР, позволяет в большей степени сократить диапазон поиска «наилучших» решений. Однако при этом, наличие таких требований существенно ограничивает класс рассматриваемых практических задач выбора.

5. Сужение множества Парето при помощи «квантов информации». В. Д. Ногиным [48, 52, 53] предложен подход к сужению множества Парето, основанный на использовании определённой числовой информации об отношении предпочтения. Указанная информация состоит из конечного набора пар несравнимых по отношению Парето векторных оценок альтернатив, относительно которых ЛПР может определённо сказать какой именно вектор пары предпочтительнее другого вектора. Сведения подобного рода называются набором «квантов информации» об отношении предпочтения, а сам подход получил наименование аксиоматического, так как он основан на использовании нескольких аксиом [50] «разумного» поведения ЛПР (а именно аксиом: исключения, транзитивности, согласования, инвариантности относительно линейного положительного преобразования). Эти аксиомы ограничивают класс рассматриваемых бинарных отношений предпочтения ЛПР. Суть данного метода заключается в следующем.

Пусть все  $k$  критериев  $f_1, \dots, f_k$  принимают числовые значения и имеются две произвольные векторные оценки альтернатив по этим критериям  $y'$  и  $y''$ . Всё множество критериев разбивается на три подмножества:  $A$  – множество критериев, по которым  $y'_i > y''_i$ ,  $y'_i - y''_i = d_i > 0 \forall i \in A$ ;  $B$  – множество критериев, по которым  $y'_j > y''_j$ ,  $y'_j - y''_j = d_j > 0 \forall j \in B$ ; множество критериев  $C = I \setminus (A \cup B)$ , где  $I = \{1, 2, \dots, k\}$ , для которых выполняется  $y'_s = y''_s, \forall s \in C$ . Соотношение  $y' \succ y''$ , где « $\succ$ » – отношение предпочтения, определённое на всем критериальном пространстве  $R^k$ , задаёт некий «квант информации» об отношении строгого предпочтения, который свидетельствует о готовности ЛПР пойти на компромисс, т.е. ЛПР согласно пойти на потери по всем кри-

териям группы  $B$  в размере  $d_j$  с целью получить прибавки в размере  $d_i$  по критериям группы  $A$ , сохранив при этом значения всех остальных критериев. Получается, что для данного ЛПР группа критериев  $A$  важнее группы критериев  $B$ . Далее на основе сгенерированного «кванта информации» формируется «новый» векторный критерий  $g$ , состоящий из компонент  $f_i$ , для которых  $i \in I \setminus B$ , а так же компонент  $g_{ij} = d_j f_i + d_i f_j$ , в котором менее важные критерии заменяются выпуклыми комбинациями.

Таким образом, сужение множества Парето при помощи «квантов информации» позволяет отбросить значительную часть парето-оптимальных вариантов как заведомо неприемлемых с точки зрения имеющихся сведений. Однако этот метод не лишён недостатков. Например, при построении бинарного отношения предпочтения ЛПР формируется допущение, что оно антирефлексивно, транзитивно и инвариантно относительно линейного положительного преобразования. В таком случае набор информации об относительной важности критериев будет являться совместным, что далеко не всегда выполняется на практике.

Помимо указанных выше подходов к сужению множества недоминируемых альтернатив в [33] рассматривается идея многоэтапного процесса агрегирования и декомпозиции структур описания проектных вариантов, представляющая неформальный переход к новым обобщенным структурам описания. По сути, данная идея предполагает разбиение общего необозримого множества парето-оптимальных альтернатив на группу локальных подмножеств, на каждом из которых проводится экспертиза. По результатам таких экспертиз основная часть вариантов отсеивается или принимается упрощенным выбором на определённом локальном уровне, а для вынесения решения по оставшимся альтернативам осуществляется дополнительный выбор на подмножестве исходного уровня. Этот подход получил развитие в [6], где уже формальным образом, с использованием языка функций выбора, были

построены схемы организации декомпозиции, соответствующие разным типам механизмов выбора исходного уровня.

Однако существенным недостатком данной модели является то, что в ней не уточняется «внутренний» характер декомпозиции и определение способа агрегирования представляет собой сложную инженерную задачу, требующую изучения особенностей конкретной предметной области.

## **1.2. Использование процедур коллективного выбора в сужении множества Парето**

Сложность и взаимозаменяемость технических, организационных и многих других аспектов в сфере управления современным производством приводят к тому, что на принятие управленческого решения влияет существенное число разнообразных взаимосвязанных факторов, причём обычными аналитическими методами выделить и проанализировать их невозможно. В связи с этим сложные многокритериальные 3В редко решаются одним человеком, и, как правило, в процессе формирования выбора участвует целый коллектив специально отобранных высококвалифицированных специалистов-экспертов в конкретной предметной области. Подход, направленный на получение от специалистов информации, необходимой для формирования и выбора решений, лежит в основе многочисленных методов экспертных оценок [39]. Однако при групповом выборе мнения экспертов по вопросам проблемной ситуации совпадают крайне редко, вследствие чего для принятия эффективного и обоснованного решения используют процедуры коллективного выбора, основанные на совместном учете индивидуальных предпочтений участников «экспертизы».

Общее число различных методов принятия коллективного решения, как показывает обзор литературы, достигает по разным оценкам 80 – 100 [3, 21, 22, 37, 76, 88, 92–95, 97, 98]. Однако, среди такого многообразия способов

коллективного выбора, наиболее широкое распространение получили процедуры голосования.

В [20] отражены основные особенности, которые характеризуют всё множество процедур голосования:

- тем или иным образом формируется набор вариантов  $X$  (например, множество управленческих решений), в отношении которых должно быть принято решение; этот список вариантов вносится в избирательный бюллетень;
- каждый из участников процедуры в соответствии с личными предпочтениями вырабатывает свое мнение об этих вариантах и отражает его в избирательном бюллетене согласно инструкции. Таким образом, формируется профиль индивидуальных мнений избирателей;
- в соответствии с какой-либо формальной процедурой по этому профилю определяется коллективное решение.

Согласно [20], по числу участников (избирателей, экспертов и т.п.) принято различать голосование двух типов: общественное (тысячи, миллионы избирателей) и голосование в малых группах (число избирателей не превышает несколько десятков/сотен человек). В дальнейшем нами будет рассматриваться именно голосование в малых группах, механизм которого отражает схема, изображённая на рис. 1.1.

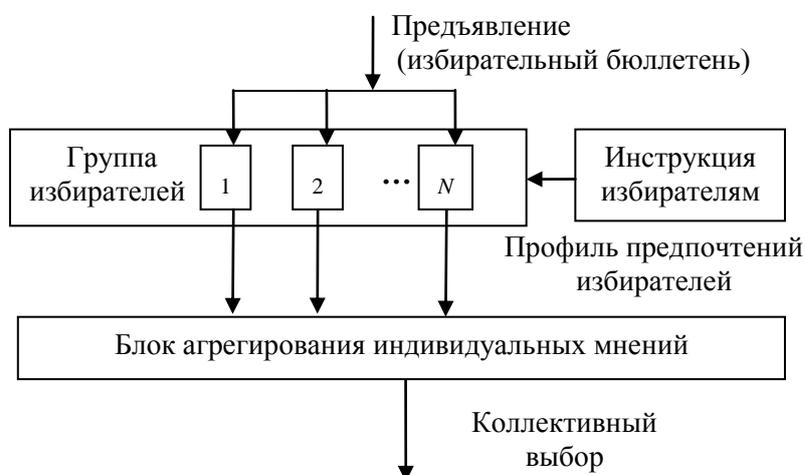


Рис. 1.1. Обобщённая схема процедуры голосования

Откуда видно, что  $N$  избирателей получают одинаковый список вариантов выбора (предъявление  $X$ ) с чётким предписанием о том, какие действия каждый из них должен осуществить с этим списком (например, указать лучшие варианты, отметить заведомо негодные варианты, в соответствии со своими предпочтениями сформировать упорядочение вариантов, осуществить численное ранжирование вариантов и т.д.).

Говоря об инструкциях, которые могут быть даны избирателям, следует различать две основные их формы [22]:

1. От избирателя требуется разбить множество вариантов выбора  $X$  на два непересекающихся подмножества (содержательный смысл которых может быть разным), или, говоря другими словами, произвести дихотомию множества  $X$ . Вследствие этого, каждый  $i$ -й избиратель выделяет подмножество  $Y_i \subseteq X$ , т.е. осуществляет свой индивидуальный выбор. В свою очередь, совокупность таких  $Y_i$  для всей группы избирателей называется профилем индивидуальных выборов  $\{Y_i\}$ , который в дальнейшем агрегируется правилом  $\pi$  в коллективный выбор  $Y^*$ . Процедуры голосования, которые по профилю  $\{Y_i\}$  вырабатывают  $Y^*$  называют процедурами типа «выбор - выбор» (сокращённо процедуры типа ВВ).

2. От избирателя требуется осуществить ранжирование (упорядочение) всех вариантов множества  $X$ , основываясь на личных предпочтениях. В результате упорядочения  $i$ -м избирателем альтернатив из предъявления  $X$  возникает бинарное отношение  $P_i$ . Совокупность  $\{P_i\}$  упорядочений всех избирателей называется профилем индивидуальных упорядочений, который агрегируется правилом  $\pi$  в коллективный выбор  $Y^*$ . Процедуры голосования, которые по профилю  $\{P_i\}$  вырабатывают  $Y^*$  называют процедурами типа «упорядочение - выбор» (сокращённо процедуры типа УВ).

В моделях голосования, использующихся в процедурах типа ВВ (УВ) коллективный выбор  $Y^*$  может формироваться [20]:

- непосредственно по профилю  $\{ Y_i \}$  ( $\{ P_i \}$ ), поступающему на блок агрегирования;
- по профилю  $\{ Y_i \}$  ( $\{ P_i \}$ ), поступающему на блок агрегирования, строится некоторая вспомогательная коллективная структура на множестве альтернатив  $X$ . Затем по какому-либо правилу выбора  $\pi$  (например, правилу экстремизации), применяемому к полученной вспомогательной структуре, осуществляется групповой выбор. В качестве вспомогательной коллективной структуры выбора может использоваться шкала (числовая, вербальная и т.п.), либо бинарное отношение на предъявлении  $X$  (ориентированный граф).

Как уже отмечалось выше, к настоящему времени общее число процедур коллективного выбора, характеризующихся различными принципами, положенными в основу их функционирования, достигает примерно сотни.

Однако в случае, если генерация коллективного решения производится на множестве вариантов, достигающих нескольких сотен и более, то механизмы выбора существующих процедур становятся непригодными, в связи с тем, что каждый из них ориентирован на обработку всего имеющегося набора альтернатив.

В [20] изложен подход, основанный на применении процедур голосования с обратной связью, которые борются с проблемой достаточно большого количества парето-оптимальных вариантов в предъявлении следующими способами:

- осуществляется разбиение исходного предъявления на подмножества, которые последовательно предоставляются экспертам для оценивания (процедуры последовательных дихотомий [20], процедура последовательного утверждения [84] и т.д.). Однако, в случае, когда число вариантов выбора очень велико, возникает проблемная ситуация, связанная с тем, что и число предъявляемых экспертам подмножеств будет большим.
- осуществляется разбиение экспертов на группы, каждая из которых получает свое предъявление (процедура пропорционального исключения

[86], процедура поочередного предъявления вариантов [85] и т.д.). Однако такой способ обладает значительным недостатком, связанным с ограниченностью числа экспертов.

### **1.3. Метод экстраполяции экспертных оценок**

Анализируя рассмотренные выше подходы к сужению множества Парето (см. п. 1.1, п. 1.2), можно сделать вывод, что их главный недостаток связан с необходимостью вовлечения в процесс сравнения и оценки всего исходного множества объектов выбора.

Принципиально иной подход к решению проблемы выбора на необозримом множестве вариантов применяется в методе экстраполяции экспертных оценок (МЭЭО) [65, 66]. В этом методе по результатам экспертного опроса на ограниченной (обозримой для ЛПР) выборке вариантов определяются неизвестные коэффициенты (веса частных критериев качества) функции обобщенного критерия (ФОК), которые затем экстраполируются на всё исходное множество альтернатив. Особый научный интерес к МЭЭО заключается в том, что на сегодняшний день, по-видимому, нет других подобных процедур коллективного выбора, итог которых был бы определен результатом ранжирования малой выборки вариантов. Следовательно, данный подход представляется перспективным направлением в построении процедур сужения множества недоминируемых вариантов до приемлемых размеров.

В [14] ввиду особенностей предметной области, возможностей экспертов и требований к условиям проведения экспертизы был сформирован набор аксиом (допущений), выполнение которых подразумевает применение МЭЭО:

1. Аксиома парнодоминантности [1], которая гласит, что любой результативный выбор на предлагаемом множестве альтернатив может быть сведен к выбору лучших (доминантных) вариантов при их попарном сравнении.

2. Аксиома детерминированности. Оценке подлежит только текущее состояние альтернативы без анализа возможных вариантов последствий принятого решения.

3. Аксиома достаточности. Каждый объект выбора (альтернативу) можно рассматривать как  $l$ -мерный вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)^T$ , компоненты которого соответствуют исходным критериям качества или каким-либо другим параметрам моделируемой системы, причем в значениях этих векторов содержится достаточное количество информации для принятия объективного и обоснованного решения.

4. Аксиома целостности выбора. Эксперт имеет целостный образ каждой сравниваемой альтернативы [35], и любая предлагаемая задача многокритериального выбора может быть им решена при разумных ограничениях на объем предъявления. Вследствие этого, предполагается, что как число критериев, так и объем обучающей выборки не должны быть большими [31]. С учётом этого при оценке вычислительной сложности каких-либо алгоритмов будем предполагать, что число критериев решаемой массовой задачи ограничено некоторой константой и не может бесконечно возрастать.

5. Аксиома существования функции обобщенного критерия, или функции полезности (ФП). Для каждой задачи векторной оптимизации объективно существует некая генеральная совокупность нехудших решений, на любом подмножестве которой определено объективно существующее отношение предпочтения, определяющее парно-доминантный выбор и имеющее индикатор 1 рода [74] – ФОК заданной структуры:

$$F(x, b) = \sum_{j=1}^k b_j f_j(x) = b^T f(x), \quad (1.1)$$

где  $f_j(x)$  – известные функции векторного аргумента  $x$ , монотонно возрастающие по каждой координате и число которых, как и число критериев задачи, ограничено некоторой константой  $k$ ;  $b_j$  – неизвестные коэффициенты

(веса, важность критериев). Согласно определению этой функции, альтернатива  $x$  не хуже альтернативы  $y$  тогда и только тогда, когда  $F(x) \geq F(y)$ . В частности, ОК может субъективно оцениваться экспертом на интуитивном уровне.

Следует отметить ряд достоинств [14], которыми обладает МЭЭО по сравнению с родственными ему процедурами:

1. Экспертный опрос проводится не на всём исходном множестве  $A$  вариантов выбора, а лишь на небольшой, обозримой для эксперта, выборке  $X$ ,  $X \subseteq A$ .

2. В предъявление  $X$  входят только реально существующие варианты выбора, сгенерированные с учетом физических законов функционирования объекта исследования, что даёт возможность экспертам/ЛПР получить целостное представление об альтернативах, позволяющее объективно провести сравнение.

3. В соответствии с инструкцией от эксперта требуется произвести сравнение альтернатив на порядковой шкале, не прибегая к численному оцениванию.

4. МЭЭО может быть применен в качестве процедуры коллективного выбора.

До настоящего времени механизм экстраполяции экспертных оценок был реализован в следующих процедурах выбора:

- МЭЭО для коллективного выбора (процедура Сыроева-Чирко-Десятова), предложенный в [28, 29];
- модифицированный МЭЭО на основе метода максимального правдоподобия (МЭЭО-ММП), предложенный в [16].

Процедура Сыроева-Чирко-Десятова базируется на следующих положениях:

1) предполагается, что каждый  $r$ -й эксперт осуществляет полное упорядочение обучающей выборки из  $m$  альтернатив

$$A_{r_1} \underset{r}{\succeq} A_{r_2} \underset{r}{\succeq} \dots \underset{r}{\succeq} A_{r_m}, \quad (1.2)$$

где символ « $\underset{r}{\succeq}$ » означает «не хуже с точки зрения  $r$ -го эксперта»; подобное упорядочение с учетом непротиворечивости экспертных предпочтений эквивалентно набору парных сравнений альтернатив;

2) строится линейная аппроксимация ФОК (1.1)

$$F(x) = b^T x, \quad (1.3)$$

с учётом ограничений на веса частных критериев

$$b_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, l}; \quad \sum_j b_j = 1;$$

3) процедура предполагает существование некоторого «истинного» («правильного») упорядочения альтернатив выборки, а экспертное ранжирование вида (1.2) отличается от него в силу случайных субъективных ошибок;

4) вероятность правильного ранжирования  $r$ -м экспертом зависит от близости полезностей по ФОК  $F(x)$  и  $F(y)$ , т.е.

$$P\left(A \underset{r}{\succeq} B / A \underset{r}{\succeq} B\right) = U_r(F(x) - F(y)) \Leftrightarrow P\left(A \underset{r}{\succ} B / A \underset{r}{\succ} B\right) = U_r\left(b^T(x - y)\right), \quad (1.4)$$

где альтернативы с произвольными номерами  $A$  и  $B$ , качество которых описывается векторами  $x$  и  $y$ ;  $U(v)$  - функция распределения некоторой случайной величины  $v = b^T(x - y)$ , характеризующая вероятность истинного упорядочения вариантов выбора экспертами.

Для поиска значений точечных оценок  $\hat{b}$ , позволяющих по ФОК (1.3) упорядочить всё необозримое для экспертов множество альтернативных решений, синтезируется аппроксимация функции правдоподобия

$$L^0(b) = \prod_{r=1}^N \prod_{i=1}^{m-1} P\left(A_i \underset{r}{\succeq} A_{i+1}\right) = \prod_{r=1}^N \prod_{i=1}^{m-1} U_r\left(b^T(x^{r_i} - x^{r_{i+1}})\right), \quad (1.5)$$

где  $N$  – количество экспертов;  $m$  – число альтернатив, где  $x^{ri}$  – векторная оценка альтернативы, поставленной  $r$ -м экспертом на  $i$ -ю позицию в ранжировании.

В процедуре Сыроева-Чирко-Десятова имеет место допущение (что видно из формулы (1.5)), согласно которому результаты парных сравнений альтернатив экспертами приближенно считались независимыми. Тогда как полное ранжирование альтернатив предполагает, что результаты парных сравнений представляют собой зависимые события.

Этот недостаток позволяет устранить процедура МЭЭО-ММП, суть которой заключается в следующем [12, 13, 43].

1). Пусть перед  $N$  экспертами стоит задача упорядочить обучающую выборку из  $m$  альтернатив согласно (1.2):  $A_1, A_2, \dots, A_m$ .

2). В общем случае результат ранжирования обучающей выборки каждым  $r$ -м экспертом можно представить в виде матричного неравенства

$$C^{(r)}\xi \geq 0, \quad (1.6)$$

где  $\xi$  – вектор полезностей (ценностей) альтернатив с точки зрения  $r$ -го эксперта,  $C^{(r)}$  – матрица, отражающая структуру упорядочения  $r$ -го эксперта, принцип построения которой показан в [15]. Согласно этому принципу, каждая строка структурной матрицы содержит элементы со значениями «1» и «-1», которые соответствуют «лучшей» и «худшей» (по мнению эксперта) альтернативе в сравниваемой паре; остальные элементы строки матрицы заполняются нулевыми значениями.

Причём, число столбцов такой матрицы совпадает с количеством альтернатив выборки, а число строк зависит от вида экспертного ранжирования.

3). В основе применения ММП лежит допущение о независимости и нормальности распределения результатов экспертного оценивания, вследствие которого, значение экспертной оценки полезности  $i$ -й альтернативы  $\xi_i$  рассматривается как некая случайная величина с математическим ожиданием

$w_i$ . Также предполагается, что обучающая выборка является однородной, в силу чего оцененные полезности имеют одинаковую дисперсию  $\sigma^2$ , которая интерпретируется как величина разногласия мнений экспертов.

Ввиду данного допущения каждая система (1.6), характеризующая предложенный  $r$ -м экспертом вариант упорядочения альтернатив выборки, интерпретируется, как некое случайное событие, вероятность которого вычисляется по формуле

$$P_r(\theta) = \int_{D_r} g(x, w, \sigma) dx \quad (1.7)$$

$$D_r = \left\{ x \in E^m \mid C^{(r)} x \geq 0 \right\},$$

где  $g(x, w, \sigma)$  – плотность  $m$ -мерного нормального распределения вида

$$g(x, w, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (x-w)^T (x-w) \right]. \quad (1.8)$$

На основе сформированного в результате экспертизы профиля индивидуальных ранжирований строится функция правдоподобия, которая в соответствии с формулой полиномиального распределения, будет иметь вид

$$L(k_1, k_2, \dots, k_s, \theta) = \frac{N!}{k_1! \dots k_s!} P_1^{k_1}(\theta) \dots P_s^{k_s}(\theta), \quad (1.9)$$

где  $k_r$  – количество экспертов, выбравших  $r$ -й вариант упорядочения;  $\theta = (w_1, \dots, w_m, \sigma)^T$  – вектор оцениваемых параметров.

4). В результате максимизации функции правдоподобия  $L$  находятся точечная оценка вектора  $w$  математических ожиданий экспертных ценностей  $\xi$  и параметра  $\sigma$ .

Тогда ММП-оценки коэффициентов  $b_j$  функции обобщённого критерия (1.3), ранжирующей альтернативы адекватно экспертизе, можно вычислить с учётом ограничения  $F(x^i, b) = w_i$ , определив соответствующую точку условного максимума функции правдоподобия (1.9).

В [43] вводятся понятия «параметрический» и «непараметрический» случай использования процедуры МЭЭО-ММП. Описанный выше механизм МЭЭО-ММП соответствует «параметрическому» случаю, позволяющему решать с помощью МЭЭО традиционные задачи построения экспертных оценок, в постановке которых требуется вычислить коэффициенты обобщённого критерия. Тогда как «непараметрический» случай применения процедуры МЭЭО-ММП предполагает, что эксперты оценивают полезность вариантов выбора без использования ФОК. При этом численное решение ищется аналогично «параметрическому» случаю, только задача состоит не в поиске точечных оценок коэффициентов  $\hat{b}$  и последующей их подстановке в формулу ФОК (1.1) для вычисления полезностей альтернатив, а в непосредственном нахождении точечных оценок полезностей альтернатив  $\hat{w}$ .

В дальнейшем для ясности для «непараметрического» случая полезность альтернативы  $A_i$  будем обозначать  $W(A_i)$ , а для «параметрического» –  $F(x^i)$ , где  $x^i$  – векторная оценка альтернативы.

Согласно [43], при исследовании МЭЭО-ММП на основе традиционных подходов к анализу процедур голосования, указанных в [22], были получены следующие результаты.

1. В рамках проверки оператора голосования на соответствие характеристическим условиям, было доказано, что процедура МЭЭО-ММП обладает следующими свойствами: нейтральность по отношению к избирателям; нейтральность по отношению к вариантам выбора; положительная ненавязанность (в «непараметрическом» случае); принцип Парето (для «непараметрического» случая). В свою очередь, доказано, что для данной процедуры не выполняются такие характеристические свойства как: положительная ненавязанность (в «параметрическом случае»); монотонность и принцип Кондорсе (в «параметрическом случае»).

2. Исследование свойств функции выбора. Коллективная функция выбора, порождаемая процедурой МЭЭО-ММП, обладает свойствами наследования и отбрасывания.

3. Исследование процедуры выбора на возможность манипулирования со стороны организатора голосования и со стороны избирателя. Процедура МЭЭО-ММП, является защищённой от манипулирования со стороны организатора голосования в случае разбиения исходного предъявления на подмножества или добавлении в исходное предъявление дополнительных вариантов ввиду того, что данная процедура порождает коллективную функцию выбора, удовлетворяющую свойствам наследования и отбрасывания. Однако, процедура МЭЭО-ММП подвержена манипулированию со стороны избирателя.

В [43, п. 3.2] рассматривается возможность реализации МЭЭО в процедурах коллективного выбора Терстоуна-Мостеллера и Борда, которые изначально не предполагалось использовать на необозримом множестве альтернатив.

Традиционная процедура Терстоуна-Мостеллера [83, 101, 102] представляет собой частный случай линейной модели парных сравнений. В рамках этой модели каждому  $r$ -му эксперту ( $r = \overline{1, N}$ ) предъявляются пары альтернатив  $(A_i, A_j)$  из всего исходного множества, состоящего из  $m$  вариантов ( $1 \leq i < j \leq m$ ), и он для каждой пары должен определить лучшую, по его мнению, альтернативу: либо  $A_i \succ A_j$ , либо  $A_j \succ A_i$ . Предполагается, что каждая альтернатива  $A_i$  обладает «истинной полезностью»  $V_i$ , а эксперт способен дать лишь некоторую её оценку  $y_i$ , которая, вообще говоря, отличается от  $V_i$  и принимается за случайную величину. Таким образом, по мнению эксперта  $A_i$  превосходит  $A_j$  ( $A_i \succ A_j$ ) в том случае, если  $y_i > y_j$ , а также, что существует вероятность предпочтения  $P(A_i \succ A_j) = \pi_{ij} = P(y_i - y_j > 0)$ , причем  $-\infty < y_i < +\infty$ . Согласно [30], набор  $\pi_{ij}$  удовлетворяет линейной модели, если существует

набор действительных чисел  $V_i$ , таких, что  $\pi_{ij} = \Phi(V_i - V_j)$ , где  $\Phi(x)$  – симметричная относительно нуля функция распределения непрерывной случайной величины, монотонно возрастающая от  $\Phi(-\infty) = 0$  до  $\Phi(+\infty) = 1$ .

В процедуре Терстоуна-Мостеллера экспертная оценка полезности  $i$ -ой альтернативы состоит из двух компонент  $y_i = V_i + \varepsilon_i$ , где  $V_i$ ,  $\varepsilon_i$  – неслучайная и случайная величины соответственно, и имеет нормальное распределение с параметрами  $(V_i, \sigma^2)$ .

Метод поиска «истинных полезностей»  $V_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), предложенный Ноезе [87], основан на допущении, что  $\sum V_i = 0$  и состоит в следующем:

1) определяются экспериментальные вероятности парных предпочтений по следующей формуле:

$$p_{ij} = \alpha_{ij} / N, \quad (1.10)$$

где  $\alpha_{ij}$  – число случаев, когда эксперт предпочел  $A_i \succ A_j$ ,  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = N$  ( $i, j = \overline{1, m}$ ,  $i \neq j$ );

2) значения вероятностей  $p_{ij} = 0$  и  $p_{ij} = 1$  заменяются  $p_{ij} = 1/(2N)$  и  $p_{ij} = 1 - 1/(2N)$  соответственно, и вычисляются

$$d_{ij} = \Phi^{-1}(p_{ij}), \quad (1.11)$$

где  $\Phi^{-1}(p_{ij})$  – функция, обратная функции нормального распределения;

3) по методу наименьших квадратов (МНК) производится минимизация по  $V_i$  величины

$$S = \sum_{i \neq j}^t [d_{ij} - (V_i - V_j)]^2 \quad \text{при условии, что} \quad \sum_{i=1}^m V_i = 0. \quad (1.12)$$

В свою очередь, параметризация процедуры Терстоуна-Мостеллера с целью её использования в МЭЭО, основывается на допущении, что полезности  $V_i$  равны соответствующим значениям ФОК, т.е.  $V_i = F(x^i)$ . Вследст-

вие этого, вектор истинных ценностей объектов выбора можно определить как

$$V = Z b,$$

где  $Z$  – регрессионная ( $m \times k$ ) матрица, каждая отдельная строка которой представляет собой значения базисных функций в точке  $x^i$ , т.е.  $z_{ij} = f(x_j^i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, k}$ ;  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i)^T$  – векторная оценка альтернативы  $A_i$  по  $k$  критериям качества.

В процедуре голосования Борда [20, 37] от избирателей требуется упорядочить выборку в соответствии с личными предпочтениями таким образом, что каждой альтернативе  $x \in X$  в упорядочении  $i$ -го избирателя ставится в соответствие номер  $r_x^i$  (ранговое место, балл). Причём будем предполагать, что более предпочтительному варианту приписывается меньший номер. Далее для каждого варианта выбора  $x \in X$  вычисляется коллективный ранг  $r_x^* = \sum_i r_x^i$ , т.е. сумма ранговых мест этого варианта в индивидуальных ранжированиях всех избирателей. Числа  $r_x^*$  для всех  $x \in X$  образуют коллективную ранговую шкалу, которая выполняет функцию вспомогательной коллективной структуры выбора. В качестве правила определения коллективного выбора  $Y^*$  в процедуре Борда используется правило экстремизации:

$$\pi : x \in Y^* \Leftrightarrow (x \in X : \forall y \in X \ r_x^* \leq r_y^*).$$

Для возможности использования процедуры Борда в МЭЭО в [43] рассматривается вариант её параметризации, который основан на допущении, что величину  $r_x^*$  можно интерпретировать как оценку полезности альтернативы  $x$ , необходимо только поменять знак  $r_x^*$ , положив

$$W(x) = \frac{N \cdot m \cdot (m + 1)}{2} - r_x^*,$$

чтобы наилучшему варианту выбора соответствовало максимальное значение оценки полезности ( $N$  и  $m$  – количество экспертов и альтернатив соответственно). А поиск оценок коэффициентов ФОК (1.3) можно осуществить по методу наименьших квадратов, минимизируя выражение

$$T = \sum_{i=1}^m [F(x^i) - W(x^i)]^2 .$$

#### 1.4. Вероятностный метод анализа процедур коллективного выбора

Вероятностный метод анализа процедур коллективного выбора был предложен в работах [11, 43]. Он позволяет вычислить точные значения различных числовых параметров и вероятностных характеристик процедур коллективного выбора.

Сравнительному анализу подверглись четыре процедуры, которые можно использовать для сужения исходного множества альтернатив посредством экстраполяции экспертных оценок:

- 1) процедура Борда [20];
- 2) процедура Терстоуна-Мостеллера [73];
- 3) процедура Сысоева-Чирко-Десятова [28];
- 4) процедура МЭЭО-ММП [14].

В ходе вычислительных экспериментов оценивались:

- величина смещения математического ожидания оценки полезности конкретной альтернативы от значения истинной полезности этой альтернативы;
- среднеквадратичное отклонение оценки полезности конкретной альтернативы от значения истинной полезности этой альтернативы;
- вероятность правильного ранжирования альтернатив на выходе процедуры.

Опишем суть данного метода.

Каждая из перечисленных процедур в качестве входной информации использует профиль индивидуальных упорядочений [20], т.е. набор упорядочений альтернатив выборки по убыванию их полезностей, составляемых каждым экспертом. Пусть число альтернатив равно  $m$  ( $A_1, A_2, \dots, A_m$ ), тогда возможно  $m!$  их различных упорядочений. Если количество экспертов равно  $N$ , то число возможных вариантов распределений голосов между каждым из  $m!$  упорядочений (число различных профилей индивидуальных упорядочений) равно числу  $N$ -сочетаний с повторениями из  $m!$  предметов

$$v = C_{m!+N-1}^N = \frac{(m! + N - 1)!}{N! (m! - 1)}.$$

Каждый профиль экспертных упорядочений определяется некоторым целочисленным набором  $(k_1, k_2, \dots, k_{m!})$ , где  $k_t$  – количество экспертов, выбравших вариант упорядочения с номером  $t$  ( $t = \overline{1, m!}$ ),  $\sum_{t=1}^{m!} k_t = N$ .

Предположим, что нам известны истинные значения полезностей альтернатив, а соответственно и правильное упорядочение, которое должно быть в коллективном выборе. При этом условии вероятность каждого профиля экспертных упорядочений  $(k_1, k_2, \dots, k_{m!})$  можно определить по формуле полиномиального распределения:

$$P_z = \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_{m!}!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m!}^{k_{m!}}, \quad z = \overline{1, v}, \quad (1.13)$$

аналогичной формуле (1.9). Значения  $p_t$  – вероятность каждого  $t$ -го варианта упорядочения, вычисляется по формулам (1.6) – (1.8).

Исходя из распределения (1.13), можно вычислить интересующие нас характеристики.

Математическое ожидание оценки полезности альтернативы  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , можно рассчитать по следующей формуле

$$M[A_i] = \sum_{z=1}^v w_z(A_i) \cdot P_z, \quad (1.14)$$

где  $w_z(A_i)$  – значение оценки полезности альтернативы  $A_i$ , полученное на выходе анализируемой процедуры при  $z$ -м варианте экспертных упорядочений.

Среднеквадратичное отклонение оценки полезности альтернативы  $A_i$  от истинного значения  $w_i$  рассчитывается по формуле

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{z=1}^v (w_z(A_i) - w_i)^2 \cdot P_z}, \quad (1.15)$$

где  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$  – вектор истинных значений полезностей альтернатив.

Вероятность правильного ранжирования альтернатив (при данном количестве альтернатив и заданном наборе всех возможных профилей экспертных упорядочений) определяется как

$$Pr = \sum_{z=1}^v P_z^*(k_1, k_2, \dots, k_m!), \quad (1.16)$$

где  $P_z^*(k_1, k_2, \dots, k_m!) = \begin{cases} P_z, & \text{если при } z\text{-м упорядочении на выходе} \\ & \text{процедуры получено правильное ранжирование;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

**Примечание.** Далее в настоящей работе при оценивании результатов, полученных на основе вероятностного метода анализа, значения рассчитанных вероятностных характеристик, для наглядности выкладок, будем брать нормированными. В качестве механизма, производящего нормировку произвольного вектора  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ , аналогично [43], будем использовать функцию вида

$$No(a_j) = \frac{a_j - \min_{k=1,n}(a_k)}{\max_{k=1,n}(a_k) - \min_{k=1,n}(a_k)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

При проведении экспериментов по вероятностному методу результат на выходе может изменяться в зависимости от соотношения истинных полезностей  $w_i$ , а также от величины ошибки экспертного оценивания. В силу того, что величина  $C_{m+N-1}^N$  чрезвычайно быстро растет с возрастанием  $m$ , в [11, 43] было решено ограничиться случаем трех альтернатив ( $m = 3$ ) при истинной упорядоченности вида  $(A_1 \succeq A_2 \succeq A_3)$ , где  $A_i$  – абсолютные значения истинных полезностей альтернатив.

Варьируя относительные значения истинных полезностей  $w_i$  при фиксированных соотношениях между ними, можно получить численные значения необходимых характеристик, в частности (1.14) – (1.16), и с их помощью проанализировать свойства процедур коллективного выбора. При этом возрастание (убывание)  $w_i$  трактуется как уменьшение (увеличение) погрешности экспертного оценивания при постоянном абсолютном значении максимальной полезности  $w_1$ . Тогда параметр  $s = 1/w_1$  можно интерпретировать как величину среднеквадратичного отклонения экспертного оценивания.

При анализе значений полученных вероятностных характеристик были сделаны следующие выводы.

1. При экспертном ранжировании на порядковой шкале не представляется возможным сделать вывод о значительном превосходстве какой-либо одной из процедур над остальными, при их сравнении по вероятностным характеристикам. Причина заключается в следующем. При большом расхождении во мнении экспертов достаточно велика вероятность любого упорядочения, вследствие чего при вычислении математического ожидания (1.14) заметно проявляется эффект сглаживания отдельных погрешностей. Результатом является незначительная смещённость математического ожидания у всех процедур и одновременно большое значение среднеквадратичного отклонения (1.15). При малом расхождении мнений

имеет место преобладание вероятности истинного упорядочения  $(A_1 \succeq A_2 \succeq A_3)$ , которое для любой процедуры на выходе дает соотношение оценок полезностей вида

$$(w_1 - w_2) / (w_2 - w_3) = 1.$$

Иными словами, при масштабировании оценок и приведении их к диапазону  $0 \leq w_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , получаются значения  $(w_1; w_2; w_3) = (1; 0.5; 0)$ . Сходимость к этой оценке при стремлении к нулю параметра, характеризующего рассогласования мнений экспертов, проявляется у всех процедур независимо от истинных полезностей альтернатив.

2. Второй важный вывод по результатам исследований [11, 43] можно сформулировать так. В целом свойства процедур коллективного выбора при ранжировании обучающей выборки на порядковой шкале значительно зависят от степени согласованности мнения экспертов. Поэтому при генерации коллективного выбора необходимо разбить профили индивидуальных экспертных ранжирований на классы по степени согласованности экспертных мнений и обрабатывать каждый класс специальным методом. То есть необходимо построить новую процедуру коллективного выбора, адаптирующуюся к типу входного профиля.

3. Проведенные исследования процедур коллективного выбора по вероятностному методу анализа показали, что процедуры МЭЭО-ММП и Терстоуна-Мостеллера по некоторым характеристикам превосходят остальные и показывают примерно одинаковые результаты. Преимущество МЭЭО-ММП состоит в том, что помимо порядковой шкалы данная процедура допускает также использование более сильной шкалы [15, 44], которую авторы назвали *лингвистической*. (Поскольку это название может навести на неверную мысль об использовании лингвистической переменной Л. А. Заде, то в дальнейшем будем называть её *разностно-классификационной* или *РК-шкалой*). Её применение позволяет значительно повысить точность статистических оценок и состоит в следующем.

Пусть для пары альтернатив  $(A_i, A_j)$  эксперт способен оценить величину разности в их полезности. На основании такой оценки пара должна быть отнесена к одному из классов  $Q_0, Q_1, \dots, Q_s$ , каждый из которых характеризуется определенной степенью различия в полезности  $A_i$  и  $A_j$ . Например, принадлежность  $(A_i, A_j) \in Q_0$  будем соотносить с ситуацией неразличимости по полезности  $A_i$  и  $A_j$ . Следующий класс  $Q_1$  соответствует уровню «малое» превосходство  $A_i$  над  $A_j$  и т. д. по порядку возрастания силы превосходства.

Для построения структурных матриц  $C^{(r)}$  на РК-шкале, также как и в случае применения порядковой шкалы, необходимо составить систему неравенств. Согласно [14, 15], построение полной системы неравенств, соответствующей экспертному упорядочению выборки на РК-шкале, осуществляется на основании следующего правила. Для каждой оцениваемой пары, не принадлежащей классу  $Q_0$ , необходимо записать неравенство  $(w_i - w_j = \Delta_{ij}) \geq 0$ , как и при оценивании на порядковой шкале, и

$$\Delta_{ij} - \Delta_{kn} \geq 0 \quad (1.17)$$

для каждой пары  $(A_i, A_j) \in Q_{z-1}$  и  $(A_k, A_n) \in Q_z$ ,  $z = 2, 3, \dots, s$ . Если  $Q_{z-1}$  пуст, то  $(A_i, A_j) \in Q_t$ , где и  $Q_t$  – первый непустой класс перед  $Q_z$ . Все прочие сочетания пар из различных классов, в силу транзитивности, являются следствиями указанных неравенств. Для пар, относящихся к классу  $Q_1$  (или к первому после  $Q_0$ ) и сравниваемых с парами из  $Q_0$  (если он не пуст), записываются по два неравенства:

$$\Delta_{ij} - \Delta_{kn} \geq 0; \quad \Delta_{ij} + \Delta_{kn} \geq 0. \quad (1.18)$$

Неравенства (1.17) – (1.18) накладывают дополнительные ограничения к системе неравенств, сформированных по результатам ранжирования на порядковой шкале, и, вследствие чего, сужают область значений коэффициентов  $b_j$ , тем самым повышая точность их оценки.

Однако проведенные исследования показали, что задача поиска оценок коэффициентов ФОК (1.3) посредством применения процедуры МЭЭО-ММП представляется довольно сложной в вычислительном плане (это является существенным недостатком МЭЭО-ММП). Как показано в [13], успешность решения этой задачи во многом зависит от удачного выбора процедуры вычисления интегралов (1.7), область интегрирования которых в общем случае представляет собой многогранный конус и напрямую зависит от стратегии экспертного ранжирования альтернатив выборки.

Известно, что в общем случае кратные интегралы по области со сложной структурой вычисляются методом Монте-Карло с привлечением специальных методов, уменьшающих дисперсию оценок. В данном случае значения интегралов (1.7) требуются для вычисления целевой функции (1.9), аргументами которой являются параметры областей интегрирования. Тогда наличие случайной составляющей в процедуре вычисления интегралов неизбежно приведет к появлению случайных погрешностей в найденном значении целевой функции, что в свою очередь, негативно отразится на точности решения и скорости сходимости. Следовательно, для вычисления интегралов (1.7) необходимо применить детерминированный метод численного интегрирования. Однако, эти методы эффективны только на достаточно простых областях интегрирования (например, параллелепипед или шар). Значит, необходимо с помощью специальной замены переменных перейти к такой области.

Согласно [16], при полном упорядочении выборки из  $m$  альтернатив на порядковой шкале кратность интеграла (1.7) будет равна  $m - 1$ . Это означает, что при использовании детерминированных процедур численного интегрирования задачу поиска оценок коэффициентов ФОК при  $m > 6$  нельзя решить за приемлемое время с точностью, необходимой для применения методов оптимизации по параметру. В [43] показана возможность замены переменных, позволяющая упростить процедуру численного интегрирования за счёт понижения кратности интеграла (1.7) до  $m - 2$ .

В случае более сложной стратегии экспертного ранжирования альтернатив по сравнению с полным упорядочиванием, например при упорядочении обучающей выборки на РК-шкале, область интегрирования будет иметь весьма сложную структуру, и уже при  $m = 4$  возникнет необходимость подбирать специальные приемы решения задачи поиска коэффициентов ФОК, индивидуальные для каждого результата экспертизы [12, 13].

Ещё одним существенным недостатком процедуры МЭЭО-ММП, в чём позволяют убедиться результаты исследований [11, 43], является тот факт, что решение, найденное с помощью этой процедуры выбора, далеко не всегда конечно. В случае единства мнений экспертов в профиле ранжирований на выходе МЭЭО можно при аналитическом решении получить бесконечные оценки полезностей. При численном же поиске оценок решения будут неопределёнными, поскольку целевая функция в этом случае имеет «плато». Очевидно, что для правильной интерпретации результатов численного решения, необходимо заранее знать, должен ли ответ быть конечным. Стоит отметить, что подобная проблема характерна для всех процедур выбора, над которыми проводились исследования по вероятностному методу анализа, в том числе и для процедуры Терстоуна-Мостеллера.

### **1.5. Выводы. Цель и задачи исследования**

1. Абсолютное большинство известных процедур голосования, в процессе выработки коллективного решения, требует рассмотрения всего исходного набора альтернатив, что делает их непригодными для осуществления выбора на необозримом для ЛПР множестве вариантов. Ввиду этого, достаточно перспективным является подход экстраполяции экспертных оценок, позволяющий принимать решение на основе сравнения вариантов из небольшой (обозримой для ЛПР) обучающей выборки. Поэтому весьма актуальной представляется задача анализа известных и синтеза новых процедур

коллективного выбора на основе МЭЭО, обладающих лучшими свойствами по сравнению с известными.

2. Анализ литературных источников показал, что процедура МЭЭО-ММП обладает рядом преимуществ перед остальными процедурами коллективного выбора, основанными на экстраполяции экспертных оценок. Однако к существенному недостатку этой процедуры относится довольно большая вычислительная сложность.

3. Ранее проводимые исследования на основе вероятностного метода анализа позволяют убедиться, что процедура Терстоуна-Мостеллера наряду с МЭЭО-ММП показывает примерно одинаковые результаты по большинству вероятностных характеристик. Однако весомое преимущество последней состоит в том, что помимо применения в качестве вспомогательной экспертной структуры порядковой шкалы оценивания, эта процедура позволяет использовать более сильную РК-шкалу, значительно повышающую точность результатов. Поэтому представляется актуальной задача разработки модели адаптации процедуры Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО к её использованию на РК-шкале.

4. Опыт нахождения статистических оценок полезности альтернатив при заданном профиле экспертных предпочтений показывает, что численное решение этой задачи может быть неустойчивым, а аналитическое решение бесконечным. При таких условиях наличие бесконечных аналитических решений приводит к значительному смещению получаемых оценок полезностей. В этой связи, для процедур выбора, которые можно использовать в МЭЭО, весьма важной является задача выявления условий существования конечных решений при заданном профиле предпочтений. Этот результат позволит синтезировать процедуру коллективного выбора на основе МЭЭО, адаптивную к структуре профиля предпочтений.

5. Вероятностный анализ процедуры МЭЭО-ММП, использующей ранжирование на РК-шкале, показал, что значительного улучшения результа-

тов (по сравнению с порядковой шкалой оценивания вариантов) удаётся добиться лишь при большой степени согласованности экспертных мнений в профиле предпочтений. Однако граничное значение параметра, характеризующего согласованность мнений экспертов в профиле, исследователям установить не удалось. Таким образом, существует настоятельная потребность в определении условий применения РК-шкалы в МЭЭО, что позволит разработать процедуру коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок, обеспечивающую возможность применения варианта метода коллективного выбора, наиболее целесообразного для конкретного профиля упорядочений.

На основании сделанных выводов сформулируем цель и задачи исследования.

Целью диссертации является разработка и исследование модели коллективного выбора, использующей различные ранжирующие шкалы, и построение на её основе адаптивной процедуры улучшенной точности.

Поставленная цель достигается посредством решения следующих задач.

1. Поиск необходимых и достаточных условий устойчивости статистических оценок полезности альтернатив при заданном профиле индивидуальных предпочтений в процедурах коллективного выбора, основанных на МЭЭО.
2. Выяснение условий применимости разностно-классификационной шкалы экспертного оценивания в процедурах экстраполяции экспертных оценок.
3. Построение и исследование адаптивной процедуры коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок.
4. Разработка комплекса программ, реализующего модели и методы анализа и синтеза процедур коллективного выбора.

## ГЛАВА 2. АДАПТАЦИЯ ПРОЦЕДУРЫ ТЕРСТОУНА-МОСТЕЛЛЕРА К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ НА РАЗНОСТНО-КЛАССИФИКАЦИОННОЙ ШКАЛЕ

### 2.1. Проблемы применения разностно-классификационной шкалы

#### 2.1.1. Шкалы экспертного оценивания, используемые в МЭЭО

Перечислим шкалы, которые могут быть использованы при экспертном ранжировании обучающей выборки в МЭЭО с указанием свойств порождаемого бинарного отношения между альтернативами, а также с описанием систем неравенств, на основании которых можно будет идентифицировать функцию полезности (1.1). Перечислять будем в порядке возрастания сложности описания указанных систем неравенств.

Ш1. *Строгая порядковая.* Для всех пар альтернатив устанавливается отношение превосходства первой альтернативы пары над второй.

Поскольку упорядочены все пары и любая альтернатива не может превосходить по полезности саму себя, то данное отношение является слабо полным и антирефлексивным. Кроме того, оно, очевидно, будет транзитивным. В литературе подобное отношение называют *строгим* или *сильным порядком* [74].

Система идентифицирующих соотношений состоит из одинаковых неравенств вида

$$\Delta F_{ij} = F(x^i) - F(x^j) \geq 0, \quad (2.1)$$

где  $F(x)$  – значение ФП для альтернативы  $x$ .

Ш2. *Нестрогая порядковая.* Для некоторых пар альтернатив устанавливается факт превосходства первой альтернативы над второй. Поскольку сравнение проводится по значению полезности, т.е. по некоторой гипотетической скалярной функции, то при таком ранжировании не может возникнуть несравнимых альтернатив. Следовательно, пары, для которых не установлено превосходство какой-то одной альтернативы следует считать парами нераз-

личимых вариантов. Обе альтернативы в такой паре имеют близкую полезность и эксперт не в состоянии их упорядочить.

Очевидно, индуцированное таким образом бинарное отношение будет полным и транзитивным. Такое отношение называют *нестрогим предпочтением* или *нестрогим слабым порядком* [74]. Оно обладает также свойствами рефлексивности, негатранзитивности и слабой полноты.

Система идентифицирующих отношений в этом случае разбивается на два класса:  $(x^i, x^j) \in Q_1$  и  $(x^i, x^j) \in Q_0$ , где  $Q_1$  – класс различимых альтернатив,  $Q_0$  – класс неразличимых альтернатив. Пары из 1-го класса порождают неравенства вида (2.1). Что касается пар 0-го класса, то для них предлагается строить следующие соотношения. Поскольку систему идентифицирующих неравенств мы предлагаем строить, не делая каких-либо предварительных допущений о числовых значениях разностей  $\Delta F_{ij}$ , то для разностей, относящихся к альтернативам класса  $Q_0$ , имеют место лишь два очевидных свойства:

- знак разности  $\Delta F_{ij}$  не определён, поскольку эксперт не уверен в предпочтении какой-либо альтернативы;
- по абсолютной величине любая разность  $\Delta F_{ij}^0$  для альтернатив из  $Q_0$  не превосходит любую разность  $\Delta F_{pq}^1$  для альтернатив из  $Q_1$ .

Таким образом, получаем систему идентифицирующих неравенств:

$$F(x^q) - F(x^p) \leq |F(x^i) - F(x^j)| \leq F(x^p) - F(x^q), \quad \forall (x^i, x^j) \in Q_0, (x^p, x^q) \in Q_1. \quad (2.2)$$

ШЗ. *Разностно-порядковая.* Эксперт сумел определить лучшую по полезности альтернативу в каждой паре, и, более того, упорядочил по убыванию все разности  $\Delta F_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq m$ . Соответственно получаем систему неравенств вида

$$F(x^{k_i}) - F(x^{k_{i+1}}) \leq F(x^{k_j}) - F(x^{k_{j+1}}). \quad (2.3)$$

Данная система неравенств индуцирует сильный порядок для разностей полезностей.

Ш4. *Разностно-классификационная.* На основании экспертной оценки каждая пара может быть отнесена к одному из классов  $Q_0, Q_1, \dots, Q_s$ , каждый из которых характеризуется определенной степенью различия в полезности  $x$  и  $y$  (см. п. 1.4). В отличие от предыдущего случая упорядочению подвергаются не все пары, для тех из них, которые попадут в один класс, не будет установлено отношение превосходства. В результате получим слабый порядок для разностей полезностей.

На практике случай разностно-порядковой шкалы маловероятен, так как он предполагает очень высокую разрешающую способность эксперта. Так что реально возможными будут шкалы Ш1, Ш2 и Ш4. Причём с точки зрения алгоритма построения системы идентифицирующих неравенств случаи Ш2 и Ш4 различаются незначительно, поэтому имеет смысл считать Ш2 частным случаем Ш4, в котором присутствуют только два класса:  $Q_1$  – класс различимых альтернатив и  $Q_0$  – класс неразличимых альтернатив.

### 2.1.2. Проблема косвенных и спорных экспертных предпочтений

Метод расчёта эмпирических (экспериментальных) вероятностей предпочтений  $p_{ij}^{\exists}$  ( $i, j = \overline{1, m}, i \neq j$ ), используемый в традиционной процедуре Терстоуна-Мостеллера (см. п.1.3), будет корректно функционировать только при стратегии полного экспертного ранжирования обучающей выборки на порядковой шкале, поскольку в этом случае, при определении  $p_{ij}^{\exists}$  всегда можно выяснить следует ли из ранжирования эксперта определённое неравенство или нет. Например, если из двух экспертов один указал предпочтение  $A_1 \succ A_2$ , а второй – нет, это означает, что, по мнению второго, выполняется противоположное неравенство  $A_2 \succ A_1$ . Однако при использовании РК-шкалы, представляющей собой более сложную стратегию экспертного ранжирования по

сравнению с порядковой шкалой, такое правило «исключённого третьего» не действует. В результате этого возникают две основные проблемы адаптации процедуры Терстоуна-Мостеллера к использованию на РК-шкале экспертного оценивания.

1. Проблема выявления *косвенных (неявных)* экспертных предпочтений.

В процедуре Терстоуна-Мостеллера экспериментальная вероятность выполнения каждого предпочтения вычисляется по частоте его встречаемости в экспертных упорядочениях. При ранжировании на РК-шкале предпочтения имеют более сложную структуру, чем на порядковой шкале и, вследствие этого, они более разнообразны. Поэтому некоторые предпочтения могут явно не присутствовать в наборе неравенств, построенных по результатам экспертизы, но следовать из прочих явно указанных соотношений. В подтверждение сказанного, рассмотрим иллюстрирующий пример.

**Пример 2.1.** Пусть два эксперта проранжировали три альтернативы на РК-шкале следующим образом.

$$\text{Э1: } (A_1, A_2) \in Q_1, \quad (A_1, A_3) \in Q_2, \quad (A_2, A_3) \in Q_1;$$

$$\text{Э2: } (A_1, A_2) \in Q_1, \quad (A_1, A_3) \in Q_1, \quad (A_2, A_3) \in Q_0.$$

В соответствии с принципом применения РК-шкалы получим две системы неравенств  $C^{(r)} w \geq 0$  относительно вектора  $w$  полезностей со следующими структурными матрицами  $C^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$ :

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, согласно процедуре Терстоуна-Мостеллера, надо определить количество экспертов, проголосовавших за выполнение каждого полученного неравенства. Как видим, в структурных матрицах есть несовпадающие строки. Однако, строки матрицы  $C^{(2)}$  с номерами 1 и 2 присутствуют в обеих матрицах, значит, оцененная вероятность каждого из неравенств  $w_1 - w_2 \geq 0$  и

$w_1 - w_3 \geq 0$  будет равна 1. Но, например, 3-я строка матрицы  $C^{(2)}$ , соответствующая неравенству  $(w_1 - w_3) - (w_3 - w_2) \equiv w_1 + w_2 - 2w_3 \geq 0$ , отсутствует в  $C^{(1)}$ . Следовательно, вероятность выполнения этого неравенства формально должна быть равна 0.5. Однако несложно заметить, что неравенство  $w_1 + w_2 - 2w_3 \geq 0$  является следствием двух неравенств, соответствующих 2-й и 3-й строкам матрицы  $C^{(1)}$ , так как получается из них сложением. Поэтому строка номер 3 из  $C^{(2)}$  косвенно присутствует и в  $C^{(1)}$ . Таким образом, Э1 неявно проголосовал за выполнение  $w_1 + w_2 - 2w_3 \geq 0$ , значит, экспериментальная вероятность этого неравенства на самом деле равна 1.

Следовательно, для корректного применения процедуры Терстоуна-Мостеллера при использовании РК-шкалы, необходимо разработать способ учёта подобных «косвенных» результатов экспертного упорядочения.

## 2. Проблема учёта *спорных* экспертных предпочтений.

Также существенным затруднением в применении РК-шкалы для процедуры Терстоуна-Мостеллера является наличие предпочтений, названных нами спорными.

**Определение 2.1.** Назовём *спорными* те соотношения в системе экспертных предпочтений, которые не противоречат этой системе, но и не входят в её состав даже косвенно.

Так, в рассмотренном выше примере 2.1 последняя строка матрицы  $C^{(2)}$ , соответствующая неравенству  $(w_1 - w_2) - (w_2 - w_3) \equiv w_1 - 2w_2 + w_3 \geq 0$  не представима никакими строками матрицы  $C^{(1)}$ , а последняя строка матрицы  $C^{(1)}$ , соответствующая неравенству  $w_2 - w_3 \geq 0$  не представима никакими строками матрицы  $C^{(2)}$ .

Таким образом, по результатам экспертизы невозможно установить, сколько экспертов считают, что эти соотношения выполняются. Возникает вопрос об интерпретации таких соотношений.

Будем считать, что в том случае, когда эксперт не может упорядочить по полезности какую-либо пару альтернатив, то эти альтернативы следует признать неразличимыми. Так, снова обращаясь к примеру 2.1, видим, что в ранжировании второго эксперта таковыми будут  $A_2$  и  $A_3$ , поскольку по мнению  $\exists 2 (A_2, A_3) \in Q_0$ .

Как уже отмечалось в первой главе (см. п. 1.4.), согласно предложенному в [70] методу, для пар, относящихся к классу  $Q_1$  (или к первому после  $Q_0$ ) и сравниваемых с парами из  $Q_0$  (если он не пуст), записываются по два неравенства:

$$\Delta_{ij} - \Delta_{kn} \geq 0; \quad \Delta_{ij} + \Delta_{kn} \geq 0 \quad (2.4)$$

Далее, согласно алгоритму процедуры МЭЭО-ММП, неравенства вида (2.4) заносятся в состав экспертных упорядочений, и на их основе строится функция правдоподобия. При использовании же процедуры Терстоуна-Мостеллера на РК-шкале наличие неразличимых альтернатив ведёт к возникновению спорных соотношений, для которых не представляется возможным рассчитать эмпирические вероятности, согласно алгоритму традиционной процедуры Терстоуна-Мостеллера.

## **2.2. Теоретическое обоснование применения разностно-классификационной шкалы**

Текущий раздел посвящен обоснованию и построению модели адаптации процедуры Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО к её использованию на РК-шкале экспертного оценивания.

1. Для определения способа выявления неявных экспертных предпочтений рассмотрим следующую ситуацию.

Пусть имеем систему линейных однородных неравенств

$$(a^{(k)})^T x \geq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

и линейное однородное неравенство

$$b^T x \geq 0. \quad (2.6)$$

**Определение 2.2.** Будем говорить, что неравенство (2.6) следует из системы (2.5), если любое решение  $x$  системы (2.5) удовлетворяет также и неравенству (2.6).

**Теорема 2.1.** Для того чтобы неравенство (2.6) следовало из системы (2.5) необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа  $\tau_k \geq 0$ , что

$$b = \sum_{k=1}^m \tau_k a^{(k)}. \quad (2.7)$$

**Достаточность** с очевидностью вытекает из правила сложений неравенств одного типа.

Для доказательства необходимости воспользуемся следующими сведениями из [67].

**Определение 2.3.** Пусть  $K$  – выпуклый конус. Множество векторов

$$K^* = \{b / x \in K \Rightarrow b^T x \geq 0\}$$

называется конусом, сопряжённым с  $K$ .

**Теорема** (Теорема 4.9 [67, стр.47]). Если многогранный конус  $K$  задан системой линейных неравенств (2.5), то сопряжённый ему конус  $K^*$  состоит из элементов  $b$ , определяемых выражением (2.7).

**Доказательство необходимости.** Пусть для любого  $x$  из выполнения (2.5) следует выполнение (2.6). Покажем, что существуют нужные числа  $\tau_k \geq 0$ . Система неравенств (2.5) определяет выпуклый конус  $K$ . Тогда по определению  $b \in K^*$ . Отсюда, по теореме 4.9, имеет место представление (2.7), что и требовалось доказать.

**Теорема 2.2.** Для многомерного нормального распределения с параметрами  $(w, \sigma^2 I)$  вероятность неравенства  $a^T x \geq 0$  равна  $U\left(\frac{a^T w}{\sigma \|a\|}\right)$ ,

где  $U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция стандартного нормального распределения (интеграл вероятности).

**Доказательство.** Сделаем замену переменных:

$$y = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = Ax.$$

По известной теореме теории вероятностей [4] в результате такой замены получим случайный вектор  $y$ , имеющий нормальное распределение с параметрами  $(Aw, \sigma^2 AA^T)$ . Тогда вероятность неравенства  $a^T x \geq 0$  будет, очевидно, равна вероятности  $P(y_1 \geq 0)$ , которая вычисляется по формуле

$$P(y_1 \geq 0) = \int_0^{+\infty} f_1(t) dt, \quad (2.8)$$

где  $f_1(t)$  – частная плотность распределения случайной величины  $y_1$ , которая, согласно той же теореме из [4], является плотностью нормальной случайной величины с параметрами  $(a^T w, \sigma^2 a^T a)$ . Поскольку  $\sigma^2 a^T a = (\sigma \cdot \|a\|)^2$ , то

$$P(y_1 \geq 0) = U\left(\frac{a^T w}{\sigma \|a\|}\right), \quad (2.9)$$

что и требовалось доказать.

Из доказанных утверждений можно сделать следующие выводы.

а). Пусть имеем систему неравенств вида (2.5). Тогда, в рамках решения проблемы выявления косвенных экспертных предпочтений, для проверки того, следует ли какое-либо неравенство вида (2.6) из этой системы, надо проверить существование таких чисел  $\tau_k \geq 0$ , при которых выполняется равенство (2.7). Это можно сделать, например, посредством поиска допустимо-

го (не обязательно оптимального) решения следующей задачи линейного программирования (ЛП):

$$c^T \tau \rightarrow \min \text{ при условии } b = \sum_{k=1}^m \tau_k a^{(k)}, \tau_k \geq 0,$$

где  $c \in E^n$  – произвольный вектор.

Поскольку при проведении экспертного ранжирования объём обучающей выборки невелик [34], не более 9, то соответствующая задача ЛП имеет небольшую размерность и её решение не представляет сложности.

б). При использовании РК-шкалы экспертные предпочтения определяются выполнением соответствующих неравенств из системы  $C^{(r)}w \geq 0$ , а для определения теоретической вероятности выполнения этих неравенств можно воспользоваться формулой (2.9).

2. Для обоснования способа учёта спорных неравенств рассмотрим следующую задачу. Пусть ведутся наблюдения за некоторой случайной величиной  $\xi$  нормально распределённой с параметрами  $(w, 1)$ , причём  $w$  неизвестно. По результатам наблюдений необходимо найти оценку  $w^\circ$  параметра  $w$ .

По аналогии с процедурой Терстоуна-Мостеллера будем использовать следующий метод оценивания. Обозначим  $U(x)$  – функция стандартного нормального распределения с параметрами  $(0, 1)$ . Тогда  $U(x - w)$  – функция нормального распределения с параметрами  $(w, 1)$ . Будем фиксировать знак  $\xi$  в каждом наблюдении, и по результатам наблюдений определим вероятность

$$d = P(\xi > 0).$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$P(\xi > x) = 1 - U(x - w) = U(w - x).$$

Из этого тождества при  $x = 0$  получаем формулу оценки

$$w^\circ = U^{(-1)}(d).$$

Теперь предположим, что вблизи нуля существует некая симметричная

зона нечувствительности, в которой значение  $\xi$  недоступно наблюдению и фиксация её знака невозможна. В этом случае возможны два выхода:

1) наблюдения, в которых  $\xi$  недоступно для измерения, не фиксировать. То есть вероятность  $d$  определять только по измеренным значениям  $\xi$ .

Обозначим  $u$  – размер зоны нечувствительности. Тогда случаи  $|\xi| \leq u$  не фиксируем. Очевидно, что в этой ситуации для зафиксированной вероятности  $q$  положительности  $\xi$  будет справедливо выражение, рассчитанное через условную вероятность:

$$q = \frac{P(\xi > u)}{1 - P(-u \leq \xi \leq u)} = \frac{P(\xi > u)}{1 - P(\xi \leq u) + P(\xi \leq -u)} = \frac{U(w - u)}{1 - U(u - w) + U(-u - w)}.$$

2) так как зона нечувствительности расположена симметрично вблизи 0, то будем считать, что при попадании туда исследуемой случайной величины, она с примерно равной вероятностью может принять как положительное, так и отрицательное значение. Иными словами

$$P(\xi > 0 \mid |\xi| \leq u) \approx 0.5.$$

Поэтому при возможности фиксации  $\xi$ , т.е. при  $\xi \geq u$  будем к счётчику благоприятных наблюдений прибавлять 1, а при попадании  $\xi$  в зону нечувствительности будем добавлять 0.5. Отсюда для зафиксированной вероятности  $v$  положительности  $\xi$  будет справедливо выражение

$$v = P(\xi \geq u) + 0.5 P(|\xi| \leq u) = 1 - U(w - u) + 0.5(U(u - w) - U(-u - w)).$$

Очевидно, что оба метода дадут оценку вероятности  $d$  с некоторыми систематическими погрешностями. Для сравнения предлагаемых вариантов оценим величины получаемых погрешностей. Чтобы получить оценки в общем виде, воспользуемся аппроксимацией.

Очевидно, относительная погрешность значения  $q$  вычисляется по следующей формуле:

$$\delta q = \frac{q}{d} - 1 = \frac{U(w - u)}{(1 - U(u - w) + U(-u - w)) \cdot U(w)} - 1.$$

Разложим правую часть полученного равенства в кратный ряд Тейлора [70, стр. 416] по переменным  $w$  и  $u$  до первого ненулевого члена. Получим

$$\delta q \approx \frac{2uw}{\pi}.$$

Точно также поступим с  $\delta v$ :

$$\delta v = \frac{v}{d} - 1 = \frac{1 - U(w - u) + 0.5(U(u - w) - U(-u - w))}{U(w)} - 1.$$

$$\delta v \approx -\frac{u^2 w}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, получаем, что второй метод даёт погрешность примерно в  $1,6/u$  раз меньшую. При малом  $u$  это означает на порядок большую вычислительную точность. Поскольку спорные неравенства появляются при близкой полезности ранжируемых альтернатив, тогда есть основания считать  $u$  и  $w$  малыми величинами.

Следовательно, при учёте спорных соотношений воспользуемся вторым методом подсчёта вероятностей предпочтения.

Тогда выполнение каждого экспертного предпочтения на разностно-классификационной шкале будет учитываться следующим образом:

а) при переборе разностей  $\forall i < j$ :

$$P^{\text{суб}}(\Delta_{ij} \geq 0) = \begin{cases} 1, & \text{если явное или косвенное,} \\ 0.5, & \text{если спорное.} \end{cases}; \quad (2.10)$$

б) при сравнении разностей

$$\forall \{(i < j) \wedge (q < p) \mid (i, j) \neq (q, p)\} \exists [(\Delta_{ij} \in Q_\alpha) \wedge (\Delta_{qp} \in Q_\beta)]:$$

$$P^{\text{суб}}(\Delta_{ij} - \Delta_{qp} \geq 0) = \begin{cases} 1, & \text{если явное или косвенное,} \\ 0.5, & \text{если спорное.} \end{cases}, \quad (2.11)$$

где  $(i, j, q, p) = \overline{1, m}$  – произвольные значения номеров альтернатив, формирующих разности;  $(\alpha, \beta) = \overline{0, s}$  – произвольные номера классов предпочтения,

характеризующих разность в полезностях между альтернативами;  
 $\Delta_{ij} = (w_i - w_j)$ .

### **2.3. Проверка индивидуальных экспертных предпочтений на непротиворечивость и допустимость**

В теории выбора при построении отношения предпочтения, на основе которого будет осуществляться выбор, предъявляется ряд требований к свойствам, которыми должно обладать это отношение. Одним из важнейших свойств является транзитивность: когда одно решение предпочтительнее второго, а оно, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего решения, то при сравнении первого и третьего решения, здравомыслящий человек выберет первое решение.

Следует отметить, что при формировании коллективного выбора требование транзитивности результирующего предпочтения может нарушаться. Это считается нормальным, так как является следствием несовпадения индивидуальных мнений экспертов. Однако в индивидуальном предпочтении оно недопустимо. Поэтому, если мы хотим иметь теорию, в рамках которой осуществляется «наилучший» выбор, то индивидуальные предпочтения должны удовлетворять аксиоме транзитивности, в противном случае вполне может существовать множество решений, выбрать наилучшее из которых невозможно.

При манипуляции с неравенствами (отсев лишних, проверка представимости одного неравенства через другие и т.д.) нами активно используется свойство транзитивности неравенств одного типа. Следовательно, для корректности выкладок индивидуальные экспертные предпочтения должны быть непротиворечивыми.

В работе [71], вопросу проверки непротиворечивости индивидуальных предпочтений уделено достаточно внимания. В частности, показана связь между нетранзитивностью и пустотой относительной внутренности области

допустимых коэффициентов постулируемой функции обобщённого критерия. В настоящей же работе предлагается более универсальный подход, не связанный с допущением о существовании какого-либо обобщённого критерия, а использующий исходную информацию в виде матрицы парных индивидуальных сравнений альтернатив выборки. Ниже опишем основную идею данного подхода.

Из теории бинарных отношений известно следующее: если бинарное отношение антирефлексивно и транзитивно, то оно ациклично. Обозначим свойства антирефлексивности, транзитивности и ацикличности буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , соответственно. Тогда данное свойство можно символически представить в виде следующей формулы алгебры высказываний

$$A \wedge B \rightarrow C,$$

или в приведённой форме

$$\neg A \vee \neg B \vee C.$$

К последней формуле приводится также выражение

$$\neg C \wedge A \rightarrow \neg B,$$

которое означает нетранзитивность циклического и антирефлексивного отношения.

Если в индивидуальных предпочтениях исключить повторения альтернатив выборки, то антирефлексивность отношения предпочтения достигается автоматически. Следовательно, при наличии антирефлексивности транзитивность эквивалентна ацикличности.

Очевидно, если  $C^{(r)}$  – структурная матрица предпочтений  $r$ -го эксперта, то  $C^{(r)T}$  представляет собой матрицу инцидентий графа  $T^{(r)} = (V, E)$ , соответствующего отношению индивидуального предпочтения. Если ранжирование проводилось на порядковой шкале, то этот граф является турниром (турнир – полный ориентированный граф). Если этот граф содержит контур, то, очевидно, индивидуальное предпочтение циклично, т.е. не удовлетворяет выдвинутым требованиям.

Существует несколько методов проверки наличия контура в графе. Изложим один, основанный на следующих очевидных свойствах графа:

- в бесконтурном графе существует хотя бы одна вершина, в которую не заходит ни одна дуга;
- такая вершина не может принадлежать контуру;
- если из графа исключить такую вершину и инцидентные ей дуги, то имеющийся в графе контур останется без изменения.

Таким образом, алгоритм (назовём его «Поиск контура») состоит в последовательном исключении из графа вершин, в которые не заходит ни одна дуга. Если на очередном шаге таких вершин не окажется, то граф содержит контур. Если из графа будут удалены все вершины, то граф не содержит контуров. Вычислительная сложность этого алгоритма оценивается величиной  $O(n \cdot m)$ , где  $n, m$  – число вершин и дуг графа, соответственно, так как необходимо однократно просмотреть все элементы матрицы инциденций.

Рассмотрим пример графа, который содержит контур (рис. 2.1):

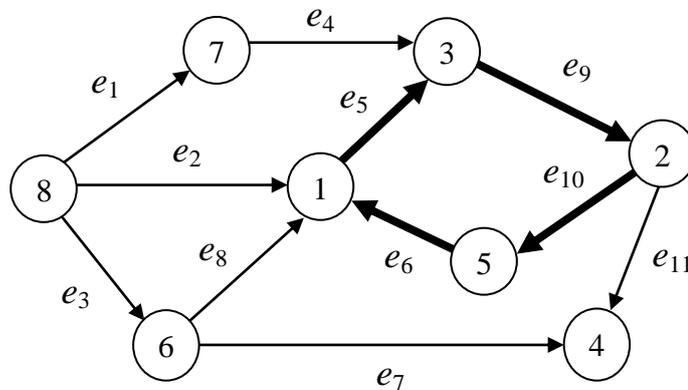


Рис. 2.1. Граф, содержащий контур

В свою очередь, пример бесконтурного графа приведён на рис. 2.2:

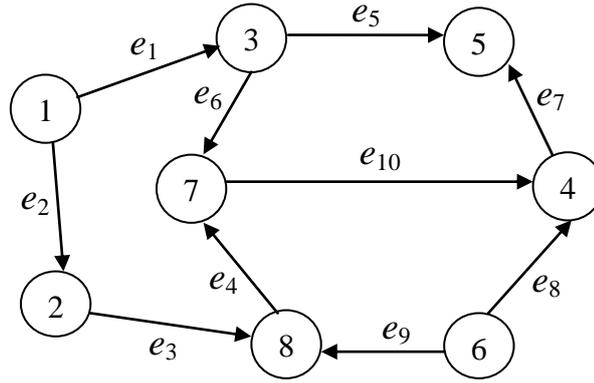


Рис. 2.2. Граф, не содержащий контуров

Из вышесказанного следует, что контуры могут появляться только при попарном сравнении альтернатив, как результат нетранзитивности предпочтений. Рассмотрим следующий пример.

**Пример 2.2.** Пусть имеем выборку из трех альтернатив  $A, B, C$ , характеризующихся тремя критериями, каждый из которых необходимо максимизировать (таблица 2.1).

Таблица 2.1

Альтернативы	Значения критериев		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$A$	1	1	1
$B$	0.95	1.2	1.2
$C$	0.9	1.35	1.45

Попарное сравнение альтернатив  $r$ -м экспертом на порядковой шкале дало следующие результаты:

$$B \succeq A; C \succeq B; A \succeq C, \quad (2.12)$$

где символ « $\succeq$ » означает – «не хуже по предпочтению». Такому упорядочению соответствует структурная матрица следующего вида:

$$C^{(r)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Применяя к упорядочению  $C^{(r)}$  алгоритм «Поиск контура», получим следующий результат:

$$\text{контур: } B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B.$$

В данном случае использование модели Терстоуна-Мостеллера даёт нулевые веса. Следовательно, вершины, образующие контур, с точки зрения экспертов неразличимы, именно так их и надо задавать на входе алгоритма процедуры коллективного выбора.

Таким образом, если алгоритм «Поиск контура», в рамках проверки  $r$ -го индивидуального упорядочения  $C^{(r)}$  на непротиворечивость, обнаружит контур в соответствующем этому упорядочению графе  $T^{(r)}$ , тогда необходимо использовать место другой алгоритм (назовём его «Исправление контура»), согласно которому:

1) необходимо предложить эксперту самостоятельно устранить ошибки транзитивности в предпочтениях, образующих контур;

2) в случае, если эксперт не в состоянии самостоятельно избавиться от противоречивых суждений, то необходимо автоматически исправить ошибки транзитивности, установив предпочтения, образующие контур – неразличимыми. Тем самым произведётся адаптация порядкового упорядочения (2.12) к РК-шкале оценивания:  $(B, A) \in Q_0$ ,  $(C, B) \in Q_0$ ,  $(A, C) \in Q_0$ .

**Примечание.** Вышеописанные алгоритмы поиска и исправления противоречивых суждений будем применять и для экспертных ранжирований на РК-шкале. При этом подвергать проверке будем только те предпочтения в экспертном упорядочении, для которых установлено отношение превосходства (класс различимости  $Q_1$  и выше).

Помимо условия непротиворечивости, для осуществления «наилучшего» выбора, в МЭЭО индивидуальные экспертные упорядочения должны удовлетворять свойству допустимости относительно заданной матрицы  $Z$  оценок по частным критериям качества.

Согласно [43, определение 1.1],  $r$ -е упорядочение допустимо, если система  $C^{(r)}Zb \geq 0$  имеет ненулевое решение (при условии неотрицатель-

ности искомым весовых коэффициентов  $b$ ), в противном случае  $r$ -е экспертное упорядочение недопустимо относительно  $Z$ .

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример.

**Пример 2.3.** Пусть имеется выборка из трёх альтернатив  $A_1, A_2, \dots, A_3$  с координатами, заданными матрицей  $Z$ :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.75 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Девять экспертов ( $N = 9$ ) упорядочили альтернативы выборки в соответствии со своими предпочтениями на порядковой шкале. Предположим, что в результате получился следующий профиль экспертных ранжирований (в скобках указаны номера альтернатив по убыванию предпочтительности):

4 эксперта указали: [3 1 2]; 5 экспертов указали: [1 3 2].

При такой матрице  $Z$  оба варианта ранжирования, предложенных экспертами, не существуют (при неотрицательных весах). Вследствие этого, в результате применения процедуры МЭЭО-ММП получаются нулевые веса –  $\hat{b} = (0, 0)^T$ .

Если предположить, что в голосовании принял участие ещё один эксперт ( $N = 10$ ) и указал упорядочение [2 1 3], то МЭЭО-ММП снова не выдаст решения. Только при 4-кратном экспертном упорядочении [2 1 3] данная процедура найдёт решение:  $\hat{b} = (0.0404, 0)^T$ . Однако при таких значениях весовых коэффициентов альтернативы выборки разделены очень слабо:  $\hat{w} = Z \hat{b} = (0.0404, 0.0303, 0)^T$ , и коллективная упорядоченность [1 2 3] не поддаётся объяснению.

Откуда следует вывод, что недопустимые экспертные упорядочения использовать не рекомендуется, так как результат на выходе процедуры выбора может быть необъяснимым.

В настоящей работе предлагается производить проверку экспертных ранжирований  $C^{(r)}$  на существование (допустимость) при заданной матрице  $Z$  посредством решения соответствующей задачи линейного программирования относительно системы  $C^{(r)}Zb \geq 0$  (при условии неотрицательности искомых коэффициентов  $b$ ). Для реализации этой задачи был разработан специальный программный модуль (названный нами «Тест экспертных упорядочений на допустимость»). В случае если модуль обнаруживает недопустимое экспертное упорядочение, он уведомляет эксперта, о том, что заданное индивидуальное ранжирование альтернатив может привести к необъяснимому результату на выходе процедуры выбора. После этого эксперту предлагается произвести повторное ранжирование обучающей выборки. Однако если эксперт не способен предложить другой вариант ранжирования, то автоматизированная система поддержки принятия решений будет вынуждена принять недопустимое упорядочение со всеми нежелательными для итогового выбора последствиями.

С точки зрения модели поведения эксперта, запрещённые упорядочения легко объясняются: так как случайной погрешности подвергнуты значения самих полезностей  $w$ , а не весовых коэффициентов  $b$ , то профиль может содержать любые экспертные ранжирования. Другой вопрос – по какой причине эксперт указал запрещённое упорядочение. Ответ может быть только один – эксперт задал случайно невозможное упорядочение вследствие близких полезностей альтернатив выборки. То есть, он их просто не различил и задал первое попавшееся упорядочение.

Проверим каков будет результат на выходе процедур Терстоуна-Мостеллера (при использовании её для МЭЭО) и МЭЭО-ММП, если эксперты укажут неразличимость альтернатив. Для этого вернёмся к примеру 2.3, и предположим, что те же девять экспертов вместо упорядочения [1 3 2] и [3 1 2] указали неразличимость всех трёх альтернатив, т.е. воспользовались РК-шкалой оценивания. Эксперт же указавший упорядочение [2 1 3] (один

эксперт) остаётся при своём мнении. При таком профиле упорядочений МЭЭО-ММП не даст результата, так как применение этой процедуры предполагает, что в каждом ранжировании (у каждого эксперта) должны быть указаны хотя бы два отличных друг от друга класса различимости, а в данном случае все пары у девяти экспертов будут принадлежать классу  $Q_0$ .

Теперь, при заданном профиле упорядочений, попробуем применить предлагаемую в настоящей работе модель Терстоуна-Мостеллера, использующую ранжирование на РК-шкале. Согласно этой модели, неразличимость трёх альтернатив означает, что все возможные в данном случае предпочтения  $H \cdot w \geq 0$  ( $H$  – структурная матрица коэффициентов неравенств) девять экспертов указывают с субъективной вероятностью 0.5. Тогда эмпирические вероятности  $p_i^{\exists}$  выполнения неравенств, реализованных каждой  $i$ -ой строкой матрицы  $H$ , будут равны:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow p^{\exists} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0.5 + 0 + 5 \cdot 0.5 \\ 4 \cdot 0.5 + 1 + 5 \cdot 0.5 \\ 4 \cdot 0.5 + 1 + 5 \cdot 0.5 \\ 4 \cdot 0.5 + 0.5 + 5 \cdot 0.5 \\ 4 \cdot 0.5 + 0 + 5 \cdot 0.5 \\ 4 \cdot 0.5 + 1 + 5 \cdot 0.5 \end{pmatrix} \div 10 \Rightarrow p^{\exists} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.55 \\ 0.55 \\ 0.50 \\ 0.45 \\ 0.55 \end{pmatrix}.$$

В результате получаются следующие значения коэффициентов функции полезности в МЭЭО:

$$\hat{b} = (0.3874, 0.2767)^T,$$

которые формируют оценки полезностей альтернатив:

$$\hat{w} = (0.3874, 0.498, 0.2767)^T.$$

Причём, несмотря на то, что полезности разделены слабо, коллективное упорядочение соответствует мнению единственного эксперта, разделившего альтернативы. Если упорядочение [2 1 3] укажут, например, 4 эксперта ( $N = 13$ ), что повлечёт за собой уменьшение процента неопределённости

мнений в профиле упорядочений, то эмпирические вероятности выполнения неравенств, реализованных каждой строкой матрицы  $H$ , будут равны:

$$p^{\exists} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.65 \\ 0.65 \\ 0.50 \\ 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с этим, имеем следующий результат:

$$\hat{b} = (1.2342, 0.8816)^T, \text{ а } \hat{w} = (1.2342, 1.5868, 0.8816)^T.$$

Итоговое упорядочение по-прежнему [2 1 3], однако очевидно, что альтернативы разделены лучше.

Таким образом, уменьшение процента неопределённости (нечувствительности) экспертных суждений повлекло за собой повышение точности найденных весовых коэффициентов и оценок полезностей альтернатив.

#### 2.4. Описание модификации процедуры Терстоуна-Мостеллера для разностно-классификационной шкалы

Как отмечалось в первой главе (см. п.1.3), в МЭЭО по результатам экспертного опроса на ограниченной (обозримой для эксперта/ЛПР) выборке вариантов  $x^i, i = \overline{1, m}$  определяются неизвестные коэффициенты  $b_j$  ФП:

$$F(x^i) = \sum_{j=1}^k b_j f_j(x^i) = b^T f(x^i),$$

которые затем экстраполируются на все исходное множество альтернатив.

В свою очередь, напомним, что для использования процедуры Терстоуна-Мостеллера в МЭЭО достаточно допустить, что значения полезностей альтернатив  $w_i$  равны соответствующим значениям ФП:  $w_i = F(x^i)$ . Тогда, вектор истинных полезностей можно представить как

$$w = Z b,$$

где  $Z$  – матрица ( $m \times k$ ) оценок альтернатив по частным критериям качества, элементы которой определяются выражением  $z_{ij} = f_j(x^i)$ .

На основании положений, сформулированных в предыдущих разделах данной главы, предлагается алгоритм модифицированной процедуры Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО, использующей ранжирование на разностно-классификационной шкале (далее «модифицированная процедура Терстоуна-Мостеллера»).

Опишем основные этапы этого алгоритма:

1. *Формирование системы неравенств, соответствующих возможным исходам ранжирования обучающей выборки из  $t$  альтернатив на РК-шкале экспертного оценивания.* В общем виде такая система неравенств будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} (w_i - w_j) \geq (w_q - w_p), \\ |w_i - w_j| \leq (w_q - w_p). \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $w_i$  – полезность  $i$ -ой альтернативы;  $(i, j, q, p) = \overline{1, m}$ , причём

$$(i < j) \text{ и } (q < p), (i, j) \neq (q, p).$$

Систему (2.13) можно записать в виде

$$H \cdot w \geq 0, \quad (2.14)$$

где  $H$  – структурная матрица коэффициентов неравенств.

Например, для случая экспертного ранжирования трёх альтернатив ( $m = 3$ ) на РК-шкале, матрица  $H$  будет иметь вид:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. *Экспертный опрос на РК-шкале оценивания.* Каждому эксперту предъявляются пары альтернатив  $A_i$  и  $A_j$  из всего множества вариантов ( $1 \leq i < j \leq m$ ), и он для каждой пары должен решить к какому классу предпочтения она относится, т.е.

$$\forall (i < j) \exists \alpha : \left( \Delta_{ij}^{<r>} = \xi_i^{<r>} - \xi_j^{<r>} \right) \in Q_\alpha, \quad (2.15)$$

где  $i$  и  $j$  – альтернативы обучающей выборки с произвольными номерами;  $\xi_i^{<r>}$  и  $\xi_j^{<r>}$  – оценки полезности альтернатив, по мнению  $r$ -го эксперта ( $r = \overline{1, N}$ );  $Q_\alpha$  – классы, характеризующие разность в предпочтении между парами альтернатив,  $\alpha = \overline{0, s}$ .

В результате экспертного опроса формируется профиль индивидуальных упорядочений, представленный в виде набора матриц  $M^{(r)}$  парных сравнений альтернатив.

Например, при следующем экспертном ранжировании выборки из четырёх альтернатив на РК-шкале

$$(A_1, A_2) \in Q_1, \quad (A_2, A_3) \in Q_2, \quad (A_3, A_4) \in Q_0;$$

матрица парных сравнений будет иметь вид:

$$\left[ M^{(r)} \right]^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_3 & A_4 & A_4 \\ Q_1 & Q_3 & Q_3 & Q_2 & Q_2 & Q_0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

2.1. *Проверка экспертных упорядочений на непротиворечивость.* Реализация алгоритмов «Поиск контура» и «Исправление контура» (см. п. 2.3).

2.2. *Проверка экспертных упорядочений на допустимость относительно заданной матрицы оценок альтернатив по частным критериям качества.* Реализация модуля «Тест экспертных упорядочений на допустимость» (см. п. 2.3).

3. *Расчёт  $C^{(r)}$  – структурных матриц предпочтений каждого  $r$ -го эксперта.* В ходе проведения экспертного опроса был получен профиль индивидуальных упорядочений (в виде набора матриц  $M^{(r)}$ ). С учетом правила построения системы идентифицирующих неравенств на РК-шкале (см. п. 1.4), в общем случае, ранжирование обучающей выборки каждым  $r$ -м экспертом можно представить в матричном виде:

$$C^{(r)} \xi \geq 0,$$

где  $\xi$  – по-прежнему вектор оценок полезностей альтернатив, по мнению  $r$ -го эксперта. Например, экспертному ранжированию (2.16) соответствует система неравенств:

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 \geq 0; & \xi_2 - \xi_1 \geq \xi_3 - \xi_2; \\ \xi_1 - \xi_3 \geq 0; & \xi_2 - \xi_1 \geq \xi_4 - \xi_2; \\ \xi_1 - \xi_4 \geq 0; & \xi_1 - \xi_2 \geq \xi_4 - \xi_3; \\ \xi_2 - \xi_3 \geq 0; & \xi_1 - \xi_2 \geq \xi_3 - \xi_4; \\ \xi_2 - \xi_4 \geq 0; & \end{cases} \quad (2.17)$$

В результате преобразования системы (2.17) к виду  $C^{(r)} \xi \geq 0$ , будет иметь место следующая структурная матрица коэффициентов неравенств:

$$\left[ C^{(r)} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. *Вычисление экспериментальных вероятностей неравенств.* Наличие того или иного предпочтения в экспертных ранжированиях проверяется следующим образом (см. п. 2.2, Теорема 2.1): для каждой  $u$ -й строки  $H_u$  матрицы  $H$  и каждой матрицы  $C^{(r)}$  проверяем, существуют ли представления

$$H_u = \tau (C^{(r)})^T, \tau_k \geq 0 \quad (2.18)$$

или

$$-H_u = \tau (C^{(r)})^T, \tau_k \geq 0. \quad (2.19)$$

Вследствие этого, возможны следующие варианты:

а) если существует представление (2.18), то увеличивается на 1 значение счётчика  $SP_u$  числа выполнений (в профиле ранжирований) неравенства, структуру которого отображает строка  $H_u$ ;

б) если существует представление (2.19), то счётчик  $SP_u$  не изменяет своего значения;

в) если не выполняется ни (2.18) ни (2.19) (то есть  $u$ -ое неравенство – «спорное»), тогда значение счетчика  $SP_u$  увеличивается на 0.5.

Далее определяем экспериментальные вероятности  $p_u^{\exists}$  ( $u = \overline{1, h}$ ) выполнения неравенств, реализованных каждой строкой матрицы  $H$ :

$$p_u^{\exists} = SP_u / N. \quad (2.20)$$

5. *Расчёт теоретических вероятностей неравенств.* Теоретическая вероятность  $p_u^{\text{Тр}}$  того, что  $H_u \cdot w \geq 0$  вычисляется согласно формуле (2.9) следующим образом:

$$p_u^{\text{Тр}} = U \left( \frac{(H_u)^T w}{\sigma \|H_u\|} \right),$$

где  $w$  – вектор истинных полезностей альтернатив выборки.

Поскольку полезности определяются с точностью до масштабного множителя, то можно положить  $\sigma = 1$  и тем самым избавиться от неоднозначности  $w_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

6. *Оптимизация.* Исходя из условия  $p_u^{\text{Тр}} \approx p_u^{\exists}$ , по методу наименьших квадратов осуществляется поиск неизвестных коэффициентов  $b_j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) функции полезности МЭЭО:

$$\sum_{u=1}^h \left[ U \left( \frac{(H_u)^T (Z b)}{\|H_u\|} \right) - p_u^{\exists} \right]^2 \rightarrow \min_{b \geq 0}, \quad (2.21)$$

Схема алгоритма модифицированной процедуры Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО представлена на рис. 2.3. По данному алгоритму было разработано программное обеспечение.

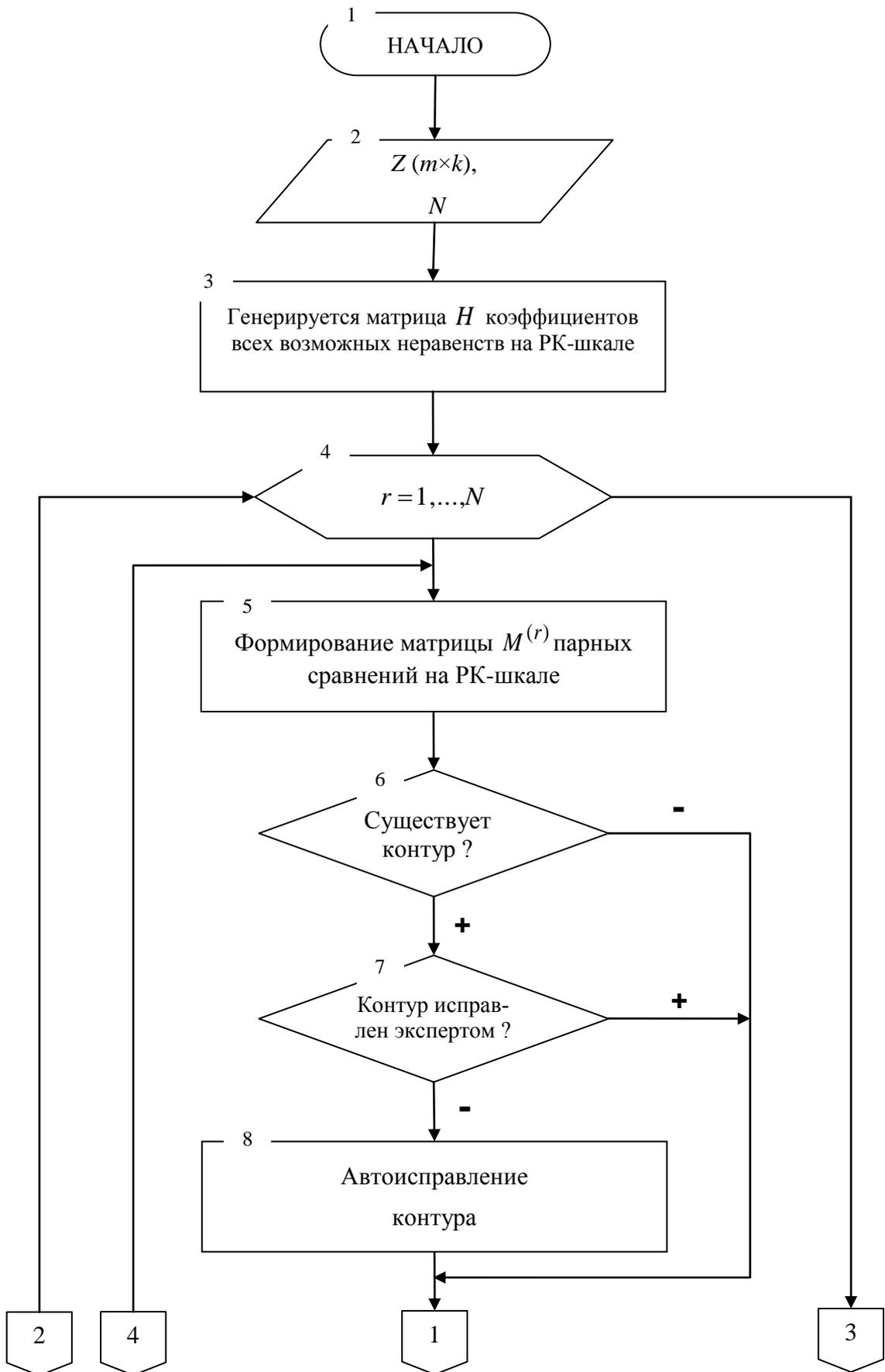
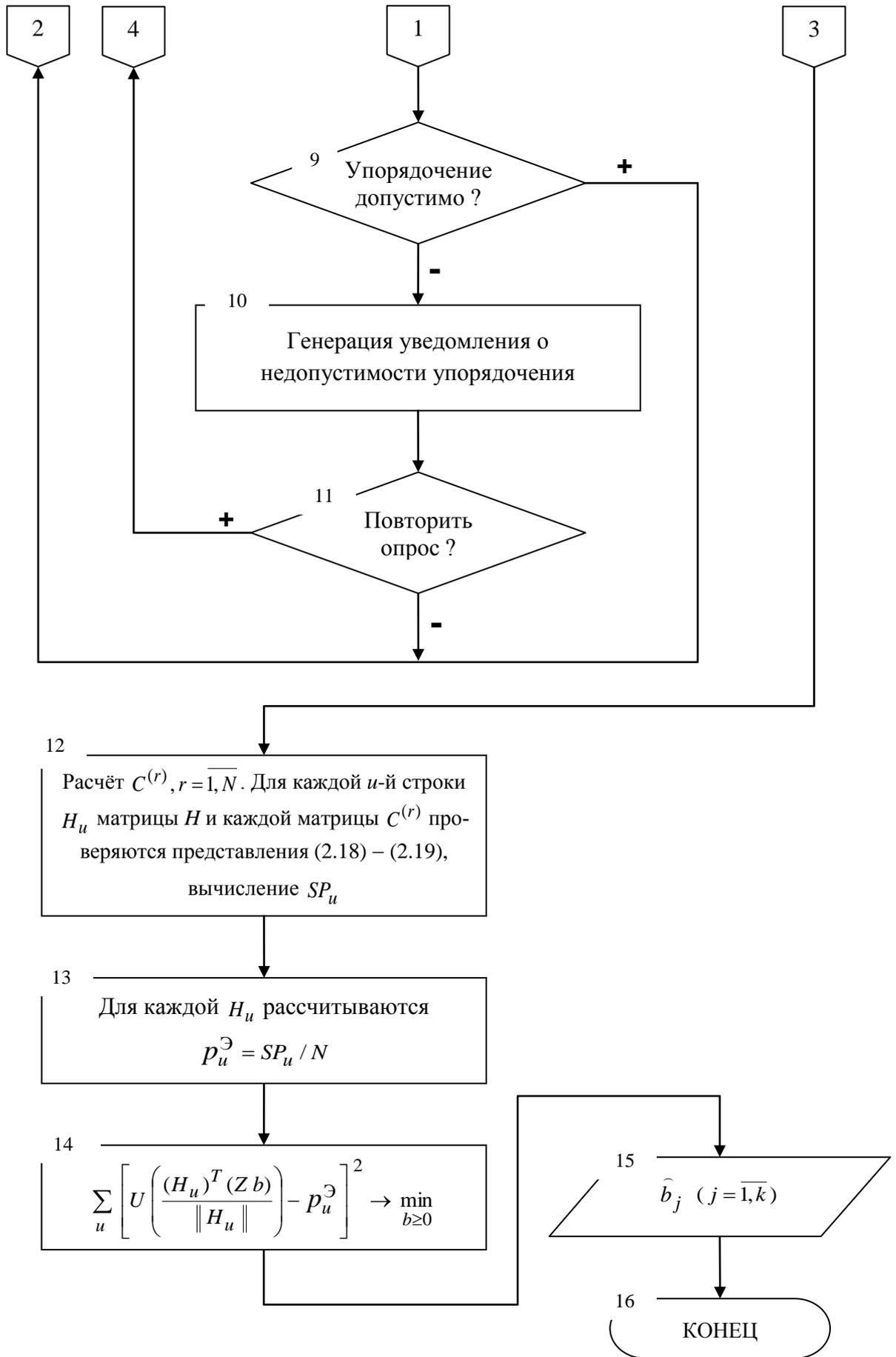


Рис. 2.3. Схема алгоритма



Продолжение Рис. 2.3

## 2.5. Выводы по главе

1. Разработана и теоретически обоснована модель выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера, отличающейся возможностью осуществлять коллективный выбор при экспертизе на разностно-классификационной шкале оценивания, являющейся более сильной по сравнению с используемой ранее порядковой шкалой.

2. Предложены модели адаптации индивидуальных экспертных упорядочений к:

- нетранзитивности предпочтений;
- недопустимости предпочтений относительно известных оценок альтернатив по частным критериям качества.

Применение этих моделей позволяет существенно повысить качество результатов на выходе процедур коллективного выбора, основанных на экстраполяции экспертных оценок.

3. На основании результатов предыдущих пунктов создан алгоритм модифицированной процедуры Терстоуна-Мостеллера для МЭЭО, позволяющий осуществлять коллективный выбор при экспертизе на РК-шкале, которая даёт возможность значительно повысить точность результатов экстраполяции по сравнению с порядковой шкалой.

## ГЛАВА 3. АНАЛИЗ И СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МОДЕЛИ ВЫБОРА НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ ТЕРСТОУНА-МОСТЕЛЛЕРА

### 3.1. Использование нелинейной процедуры Терстоуна-Мостеллера

Метод, предложенный Луисом Терстоуном [101], основан на линейризации каждой разности в скобках выражения

$$F = \sum_{i \neq j, j=1}^m \left[ p_{ij} - U \left( \frac{w_i - w_j}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 \quad (3.1)$$

и приведении нелинейной целевой функции (3.1) к виду (1.12). Как известно [27], подобный подход приводит к значительной потере точности. Продемонстрируем это на примере.

**Пример 3.1.** Пусть пять экспертов (Э1, Э2, Э3, Э4, Э5) предложили следующие варианты упорядочения выборки из четырёх альтернатив:

$$\text{Э1, Э2 и Э3: } A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4;$$

$$\text{Э4: } A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4;$$

$$\text{Э5: } A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3.$$

Структурная матрица  $H$ , соответствующая возможным исходам ранжирования четырёх альтернатив на порядковой шкале, имеет вид

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Профиль экспертных упорядочений порождает следующие экспериментальные вероятности (формула 1.10) для неравенств, соответствующих строкам матрицы  $H$ :

$$p^{\mathfrak{D}} = (1; 1; 1; 0.8; 0.8; 0.8).$$

В результате применения метода линейризации (линеаризованный МНК) получились следующие оценки полезностей альтернатив

$$\hat{w} = (0.414; -0.046; -0.138; -0.230).$$

Рассчитанные при этих оценках теоретические вероятности (формула 2.9) оказались равными

$$p^{\text{Tp}} = (0.68; 0.71; 0.74; 0.54; 0.57; 0.54).$$

Несложно заметить, что значения  $p^{\text{Tp}}$  достаточно сильно разнятся с исходными вероятностями  $p^{\text{Э}}$ .

Однако не стоит забывать, что статья [101] с описанием метода Терстоуна-Мостеллера увидела свет в 1927 году во времена отсутствия даже примитивных компьютеров, и предложенный способ оптимизации был вынужденной мерой. В то же время, как показывают численные эксперименты, даже при использовании современных математических пакетов не всегда удаётся найти минимум функции (3.1) ввиду её плохой обусловленности при наличии эмпирических вероятностей  $p_{ij} = 1$  (или 0).

Поэтому для того, чтобы повысить точность решений, найденных при помощи метода Терстоуна-Мостеллера, предлагается воспользоваться взвешенным МНК, описанным в [27].

Суть этого метода состоит в использовании специально подобранных весовых коэффициентов. Допустим, что уравнение, связывающее вход и выход исследуемого объекта, нелинейно по параметрам, т.е. имеет вид:

$$y = F(x, b). \quad (3.2)$$

Решением (вектором коэффициентов) задачи среднеквадратичной аппроксимации при нелинейной модели (3.2) будем считать то значение вектора  $b \in E^k$  ( $E^k$  – пространство коэффициентов ФОК), для которого сумма квадратов отклонений

$$\Psi(b) = \sum (F(x_i, b) - y_i)^2$$

принимает минимальное значение.

В некоторых случаях уравнение (3.2) можно преобразовать к линейному виду:

$$g(y) = g(F(x, b)) = b_1 f_1(x) + \dots + b_k f_k(x). \quad (3.3)$$

Введя новую переменную  $z = g(y)$ , получаем обычный МНК.

При наличии ошибок в исходных данных преобразование (3.3), как правило, приводит к потере точности, так как минимизация проводится уже преобразованной суммы квадратов, чьё оптимальное значение не соответствует минимуму  $\Psi(b)$ . Расхождение между истинным значением функции и её аппроксимацией, полученной в результате линеаризации, можно значительно уменьшить с помощью введения соответствующих весов  $\rho_i$  для экспериментальных точек, т.е. минимизировать сумму:

$$\tilde{\Psi}(b) = \sum \rho_i^2 (g(F(x_i, b)) - g(y_i))^2, \quad (3.4)$$

где  $\rho_i = \frac{1}{g'(y_i)}$  [27].

Для модели Терстоуна-Мостеллера  $y = p$ , а  $g(p_{ij}) = U^{-1}(p_{ij})$ .

Выражение для  $g'(y)$  получим по известной формуле производной обратной функции. Пусть  $f(x) = U\left(\frac{x}{s}\right)$  и  $g(y) = f^{-1}(y)$ . Имеем:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/s} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \quad \text{где } f'(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2}.$$

Тогда  $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$  в точке  $y = f(x)$ . Найдём соответствующее значение

$x = f^{-1}(y) = U^{-1}(y) \cdot s$ . Отсюда

$$g'(y) = s\sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}\left(U^{-1}(y)\right)^2},$$

где  $s$  – среднеквадратичное отклонение для экспериментальных точек.

Значение  $t = U^{-1}(y)$  можно вычислить с помощью соответствующей встроенной функции, имеющейся во многих математических пакетах. Например, в *MathCAD* можно воспользоваться оператором  $t := qnorm(y, 0, 1)$ .

Соответствующие значения подставляются в формулу (3.4) и произво-

дится минимизация полученного выражения.

Вернёмся к примеру 3.1 и произведём расчёт оценок полезностей альтернатив, применив в качестве механизма оптимизации взвешенный МНК. В результате получим следующие оценки

$$\hat{w} = (1.359; -0.249; -0.453; -1.155).$$

Рассчитанные при этих оценках теоретические вероятности равны

$$p^{Tp} = (0.87; 0.97; 0.99; 0.78; 0.92; 0.76).$$

Очевидно, что теоретические вероятности неравенств, полученные на основе применения взвешенного МНК, значительно лучше совпадают с исходными экспериментальными вероятностями по сравнению с результатами, полученными посредством использования линейризованного МНК.

Численные эксперименты показали, что ещё более точный результат на выходе модели выбора, основанной на процедуре Терстоуна-Мостеллера, можно получить, если использовать в качестве способа оптимизации метод непосредственной минимизации суммы квадратов отклонений (нелинейный МНК):

$$\Psi = \sum_{u=1}^h \left[ p_u^{\text{Э}} - U \left( \frac{a_u^T w}{\sigma \|a_u\|} \right) \right]^2 \rightarrow \min,$$

где  $a_u$  – вектор коэффициентов, отображающий структуру  $u$ -го неравенства.

Снова обратимся к примеру 3.1 и рассчитаем оценки полезностей альтернатив, используя метод оптимизации на основе нелинейного МНК.

В результате имеем следующие значения оценок

$$\hat{w} = (4.345; -0.518; -1.448; -2.379).$$

Теоретические вероятности при таких полезностях будут равны

$$p^{Tp} = (1; 1; 1; 0.82; 0.96; 0.82),$$

что хорошо совпадает с экспериментальными вероятностями.

Рассмотрим иллюстрирующий пример применения нелинейного МНК для модели выбора, основанной на методе Терстоуна-Мостеллера, которая

использует разностно-классификационную шкалу экспертного оценивания.

**Пример 3.2.** Пусть имеем 4 альтернативы и 10 экспертов. Допустим, в результате экспертизы на РК-шкале получился следующий профиль индивидуальных упорядочений:

$$5 \text{ экспертов: } (A_1, A_2) \in Q_1; \quad (A_2, A_3) \in Q_1; \quad (A_3, A_4) \in Q_1,$$

$$5 \text{ экспертов: } (A_1, A_2) \in Q_1; \quad (A_2, A_3) \in Q_0; \quad (A_3, A_4) \in Q_1.$$

Матрица  $H$ , соответствующая возможным исходам ранжирования четырёх альтернатив на РК-шкале, имеет вид

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка соотношений (2.18) и (2.19) для строк матрицы  $H$  показала, что с эмпирическими вероятностями  $p_u^{\exists} = 1$  выполняются неравенства, соответствующие строкам

$$u = [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 17, 18, 21].$$

В результате применения метода линеаризации были получены следующие оценки полезностей альтернатив:

$$\hat{w} = (1.526; 0; 0; -1.526)^T.$$

Рассчитанные при этих оценках теоретические вероятности имеют вид:

$$p_u^{\text{Tp}} = (0.86; 0.86; 0.99; 0.86; 0.86; 0.89; 0.97; 0.94; 0.97; 0.94; 0.97; 0.97; 0.89)^T.$$

Эти значения вероятностей далеки как от исходных значений 1, так и от 0.95, полученных в процессе линеаризации.

В свою очередь, при использовании нелинейного МНК, получились следующие оценки полезностей:

$$\hat{w} = (4.819; 0.101; -0.425; -4.496)^T$$

и теоретические вероятности:

$$p_u^{\text{Tp}} = (1; 1; 1; 0.999; 0.998; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1),$$

что с достаточно высокой степенью совпадает с эмпирическими вероятностями.

**Примечание.** Оптимизация на основе применения нелинейного МНК в процедуре Терстоуна-Мостеллера нами производилась в системе *MatLab* с помощью модуля *lsqnonlin* с точностью (по значению минимизируемой функции)  $\varepsilon = 0.000001$ .

Стоит заметить, что в «непараметрическом» МЭЭО (см. п. 1.3) значения оценок для истинных полезностей  $w_i$  определяются с точностью до линейного монотонного преобразования. Иными словами, решением является некоторое множество точек. Для вычислительных алгоритмов это создаёт дополнительную сложность, замедляющую сходимость. Поэтому на компоненты вектора  $w$  необходимо наложить дополнительное условие, например, подобно традиционной процедуре Терстоуна-Мостеллера,

$$\sum w = 0. \quad (3.5)$$

Чтобы при этом избавиться от дополнительного ограничения при оптимизации, представим  $w$  в виде

$$w = Z \cdot b, \quad (3.6)$$

где  $b$  – произвольный вектор из  $m - 1$  компонент, а  $Z$  – некоторая фиксированная матрица. Оптимизацию будем проводить по  $b$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $w$  – вектор из  $m$  оценок, удовлетворяющий условию (3.5), и  $Z$  – произвольная матрица размера  $m \times (m - 1)$  ранга  $m - 1$ , сумма элементов каждой строки которой равна 0. Тогда отображение (3.6) взаимно-однозначно.

**Доказательство.**

1. Прежде всего, покажем, что вектор  $w$ , полученный по формуле (3.6), удовлетворяет условию (3.5). Обозначим  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$  – вектор, содержащий  $m$  единиц. Тогда  $\sum w = e^T w = e^T Z b$ . Так как сумма элементов строк матрицы  $Z$  равна 0, то  $e^T Z = (0, 0, \dots, 0)$ , а, следовательно,  $e^T Z b = 0$  при лю-

бом  $b$ .

2. Предположим, что для некоторого  $w$  существуют два различных вектора  $b^1$  и  $b^2$ , удовлетворяющих равенству (3.6). Тогда

$$\vec{0} = Z (b^1 - b^2). \quad (3.7)$$

Так как ранг  $Z$  равен  $m - 1$ , то матрица  $Z^T Z$  имеет обратную, а матрица  $A = (Z^T Z)^{-1} Z^T$  является псевдообратной к  $Z$ , т.е. такой, что  $A Z = I$ .

Умножив (3.7) слева на  $A$ , получим  $\vec{0} = b^1 - b^2$ , т.е.  $b^1 = b^2$ . Отсюда равенство  $A w = b$  определяет однозначное обратное преобразование и отображение (3.6) взаимно-однозначно, что и требовалось доказать.

**Следствие.** Для «непараметрического» случая в качестве  $Z$  можно использовать любую матрицу, удовлетворяющую условиям теоремы 3.1.

### 3.2. Условия конечности решения в методе экстраполяции экспертных оценок

Опыт нахождения ММП-оценок в МЭЭО убеждает в том [43], что решение этой задачи не всегда конечно.

**Пример 3.3.** Пусть имеем следующие варианты экспертного упорядочения выборки их трёх альтернатив  $A_1, A_2, A_3$ :

$$A_1 \succeq A_2 \succeq A_3; \quad A_1 \succeq A_2 \succeq A_3; \quad A_1 \succeq A_3 \succeq A_2,$$

где символ  $\succeq$  означает «не хуже по предпочтению».

Этому набору упорядочений соответствует функция правдоподобия

$$L = P (A_1 \succeq A_2 \succeq A_3)^2 \cdot P (A_1 \succeq A_3 \succeq A_2), \quad (3.8)$$

максимум которой равен 0.14815 и достигается при следующих соотношениях полезностей альтернатив:

$$w_1 - w_2 = +\infty; \quad w_2 - w_3 = 0.60914.$$

Численная же оптимизация функции (3.8) в системе *MathCAD* даёт следующие оценки полезностей:

$$\widehat{w}_1 = 6.96689; \widehat{w}_2 = -3.18503; \widehat{w}_3 = -3.79417.$$

При этих  $\widehat{w}_i$  оптимальное значение  $L$  совпадает с 0.14815. Условие  $\widehat{w}_2 - \widehat{w}_3 = 0.60914$ , как видно, выполняется, а  $\widehat{w}_1 - \widehat{w}_2 = 10.15192$ .

В соответствии со значением функции нормального распределения полученное решение аппроксимирует бесконечно удалённую точку. Однако, очевидно, что такой аппроксимацией будет любое решение, удовлетворяющее условиям

$$\widehat{w}_1 - \widehat{w}_2 \geq 8; \widehat{w}_2 - \widehat{w}_3 = 0.60914.$$

Иными словами, численное решение не единственно.

Аналогичный результат получим при применении к рассматриваемому примеру процедуры Терстоуна-Мостеллера, использующей нелинейный МНК.

Проведённые исследования [43] показали, что помимо неоднозначности, наличие бесконечных решений приводит к значительному смещению полученных оценок полезности. Поэтому вопрос о существовании или отсутствии бесконечных решений в МЭЭО весьма важен.

Пусть  $N$  экспертов проранжировали элементы выборки из  $m$  альтернатив на порядковой шкале по убыванию полезностей в соответствии со своими индивидуальными предпочтениями. Для каждой пары  $(A_i, A_j)$  альтернатив  $(i, j = \overline{1, m}, i \neq j)$  вычислим субъективные вероятности выполнения соотношения  $A_i \succeq A_j$ :

$$p_{ij} = \sum_{i \neq j} P^{суб}(\Delta_{ij} \geq 0) / N, \quad (3.9)$$

где  $P^{суб}(\Delta_{ij} \geq 0)$  вычисляются по формуле (2.10).

Далее на множестве альтернатив введём следующее бинарное отношение  $R$ :

$$(A_i, A_j) \in R \Leftrightarrow 0 < p_{ij} < 1. \quad (3.10)$$

Очевидно, отношение (3.10) симметрично, так как

$$(A_i, A_j) \in R \Leftrightarrow (A_j, A_i) \in R,$$

хотя  $p_{ij} = 1 - p_{ji}$ , т.е. в общем случае  $p_{ij} \neq p_{ji}$ .

Геометрическим образом данного отношения будет неориентированный граф экспертного упорядочения  $G = (A, R)$ , где  $A$  – множество альтернатив.

Согласно процедуре Терстоуна-Мостеллера, оценки  $\hat{w}_i$  полезности каждой альтернативы подбираются из условия примерного равенства

$$U\left(\frac{\hat{w}_i - \hat{w}_j}{\sqrt{2}}\right) \approx p_{ij}, \quad (3.11)$$

где  $U(x)$  – функция стандартного нормального распределения (интеграл вероятности). Соотношение (3.11) справедливо и для МЭЭО-оценок.

Следовательно, бесконечные оценки могут появиться только у альтернатив, входящих в пары, для которых экспериментальные вероятности  $p_{ij} = 1$  (или 0). В этом случае в силу (3.11)

$$\hat{w}_i - \hat{w}_j = +\infty \text{ (или } \hat{w}_i - \hat{w}_j = -\infty).$$

Для таких пар отношение (3.10) не выполняется. Поэтому, в частности, альтернатива выборки, если она единственная имеет бесконечную оценку полезности, соответствует изолированной вершине графа  $G$ . Пример такой структуры графа экспертного упорядочения для выборки из пяти альтернатив представлен на рис. 3.1.

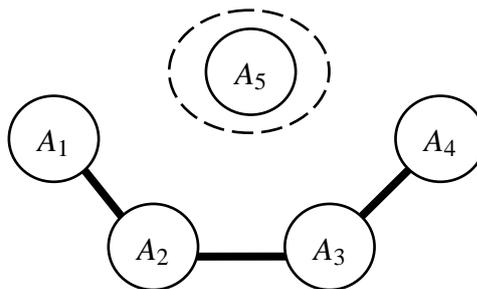


Рис. 3.1. Граф экспертного упорядочения с изолированной вершиной

Возможна ситуация, когда некоторое подмножество альтернатив имеет бесконечно лучшие (или бесконечно худшие) оценки по сравнению с прочими альтернативами, но внутри этой группы разности  $\hat{w}_i - \hat{w}_j$  конечны. Это означает, что между парами альтернатив этой группы имеет место отношение (3.10), а с прочими альтернативами они никак не связаны. Иными словами, альтернативы этой группы образуют отдельную компоненту связности графа  $G$ . Внутри этой компоненты все вершины взаимно достижимы. Пример подобной структуры графа для пяти альтернатив представлен на рис. 3.2.

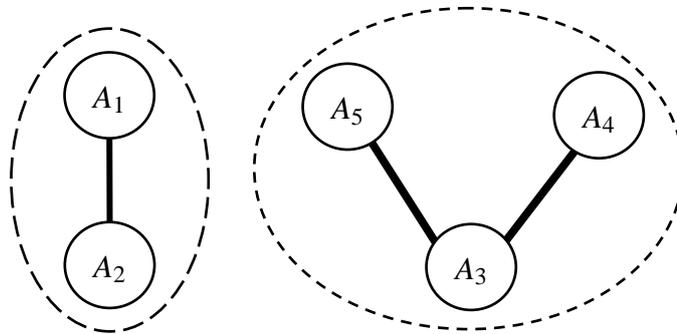


Рис. 3.2. Граф экспертного упорядочения с двумя бесконечно удалёнными друг от друга компонентами связности

Условие конечности решения МЭЭО определяется следующей теоремой.

**Теорема 3.2.** Пусть в графе  $G = (A, R)$  вершины  $A_i$  и  $A_j$  достижимы одна из другой. Тогда  $|\hat{w}_i - \hat{w}_j| < +\infty$ , где оценки  $\hat{w}_i$  и  $\hat{w}_j$  являются координатами точки теоретического максимума функции правдоподобия в МЭЭО.

**Доказательство.**

1. Докажем, что из  $(A_i, A_j) \in R$  следует  $|\hat{w}_i - \hat{w}_j| < +\infty$ .

Тот факт, что  $(A_i, A_j) \in R$  означает, что в данном профиле альтернативы  $A_i$  и  $A_j$  по-разному упорядочены у различных экспертов.

Известна следующая теорема (Теорема 2.6, [43]). Пусть в заданном профиле две некоторые альтернативы  $A_i$  и  $A_j$  по-разному упорядочены у различных экспертов. Тогда разность  $\widehat{w}_i - \widehat{w}_j$  в оптимальной точке функции правдоподобия не может равняться бесконечности.

Утверждение теоремы 2.6 полностью совпадает с требуемым выводом.

2. Докажем основное утверждение теоремы.

Пусть в графе  $G = (A, R)$  вершины  $A_i$  и  $A_j$  взаимно достижимы. Возможны два случая.

а) в  $G$  имеется ребро  $(A_i, A_j)$ . Тогда  $(A_i, A_j) \in R$  и требуемое следствие получается в силу п. 1.

б) в  $G$  нет ребра  $(A_i, A_j)$ , но существует конечный маршрут из  $A_i$  в  $A_j$ :

$$A_i = B^1, B^2, \dots, B^n = A_j.$$

Тогда для каждого ребра маршрута справедлив п. 1 данной теоремы и  $|w(B^u) - w(B^{u+1})| < +\infty$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \widehat{w}_i - \widehat{w}_j &= \widehat{w}_i - w(B^2) + w(B^2) - \dots - w(B^n) + w(B^n) - \widehat{w}_j = \\ &= [\widehat{w}_i - w(B^2)] + [w(B^2) - w(B^3)] + \dots + [w(B^{n-1}) - \widehat{w}_j]. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|\widehat{w}_i - \widehat{w}_j| \leq |\widehat{w}_i - w(B^2)| + |w(B^2) - w(B^3)| + \dots + |w(B^{n-1}) - \widehat{w}_j| < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что если граф  $G$  связный, то точка теоретического максимума функции правдоподобия конечна.

Предлагается следующий метод анализа профиля экспертных упорядочений на устойчивость к бесконечным решениям:

1) на основании профиля предпочтений на порядковой шкале оценивания вычисляем экспериментальные вероятности  $p_{ij}$  по формуле (3.9) для всех пар альтернатив;

- 2) строим бинарное отношение  $R$  и на его основе – граф  $G$ ;
- 3) проверяем связность графа экспертного упорядочения  $G$ : если граф связный, то ММП-оценки всех альтернатив будут конечны.

Рассмотрим два иллюстрирующих примера. Сначала вернёмся к примеру 3.3.

Согласно формуле (3.9) имеем:  $p_{12} = 1$ ;  $p_{13} = 1$ ;  $p_{23} = 2/3$ .

Следовательно, граф  $G$  содержит только одно ребро  $(A_2, A_3)$  и имеет две компоненты связности:  $\{A_1\}$  и  $\{A_2, A_3\}$ . Оценка  $\hat{w}_1$  – бесконечна. Структура графа экспертного упорядочения представлена на рис. 3.3.

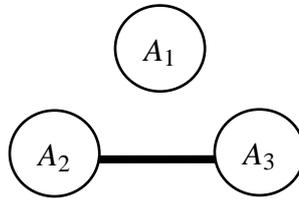


Рис. 3.3. Несвязный граф экспертного упорядочения

**Пример 3.4.** Пусть имеем следующие варианты упорядочения выборки их трёх альтернатив  $A_1, A_2, A_3$ :

$$A_1 \succeq A_2 \succeq A_3; \quad A_2 \succeq A_1 \succeq A_3; \quad A_2 \succeq A_3 \succeq A_1.$$

Имеем:  $p_{12} = 1/3$ ;  $p_{13} = 2/3$ ;  $p_{23} = 1$ . Граф  $G$  содержит два ребра  $(A_1, A_2)$  и  $(A_1, A_3)$ , а значит является связным. Бесконечных оценок нет. Пример структуры такого графа представлен на рис. 3.4.

Численное решение даёт следующие значения оценок полезности:

$$\hat{w}_1 = 0; \quad \hat{w}_2 = 0.923; \quad \hat{w}_3 = -0.923.$$

Расчётные значения вероятностей превосходства согласно (3.11) составляют:  $(p_{12}^{\text{ГР}} = 0.257; p_{13}^{\text{ГР}} = 0.743; p_{23}^{\text{ГР}} = 0.904)$ , все отличны от 0 и 1.

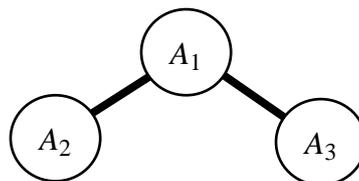


Рис. 3.4. Связный граф экспертного упорядочения

Теорема 3.2 определяет достаточные условия конечности решения. Выясним, каковы необходимые условия. Для этого нам понадобятся вычислительные формулы для вероятностей (1.7).

Сделаем замену переменных  $y = C^{(r)}x$ . В соответствии с правилами преобразования нормального распределения [4], данная замена преобразует плотность нормального распределения к виду

$$g(y, h) = \sqrt{\frac{(\det(CC^T))^{-1}}{(2\pi)^{m-1}}} e^{-\frac{1}{2}(y-h)^T(CC^T)^{-1}(y-h)}, \quad (3.12)$$

где  $h = Cw$  (верхний индекс матрицы  $C^{(r)}$  опущен).

Тогда вероятность (1.7) определяется по формуле

$$P(y, h) = \sqrt{\frac{(\det(CC^T))^{-1}}{(2\pi)^{m-1}}} \int_0^{+\infty} dy_{m-1} \int_0^{+\infty} dy_{m-2} \cdots \int_0^{+\infty} dy_1 \exp\left[-\frac{1}{2}(y-h)^T(CC^T)^{-1}(y-h)\right].$$

Данное выражение можно преобразовать к виду

$$P(z) = \sqrt{\frac{(\det(CC^T))^{-1}}{(2\pi)^{m-1}}} \int_{-h_{m-1}}^{+\infty} dz_{m-1} \int_{-h_{m-2}}^{+\infty} dz_{m-2} \cdots \int_{-h_1}^{+\infty} dz_1 \exp\left[-\frac{1}{2}z^T(CC^T)^{-1}z\right], \quad (3.13)$$

где  $z = y - h$ ,  $h$  – вектор искомых параметров функции правдоподобия. Как видим, формула вычисления вероятностей индивидуальна для каждого варианта упорядочения.

**Теорема 3.3.** Пусть граф  $G$  несвязный и  $A_i$  и  $A_j$  принадлежат разным компонентам связности. Тогда в точке теоретического максимума функции правдоподобия  $|d_{ij}| = |\hat{w}_i - \hat{w}_j| = +\infty$ .

**Доказательство.** Обозначим  $K1$  и  $K2$  – компоненты связности, содержащие  $A_i$  и  $A_j$ , соответственно. Поскольку  $A_i$  и  $A_j$  принадлежат разным компонентам, то все эксперты считают их одинаково упорядоченными. Пусть, для определённости,  $A_i \succeq A_j$ .

Возможны два случая:

а) во всех структурных матрицах  $C^{(r)}$  присутствует строка, соответствующая разности полезностей  $w(A_i) - w(A_j)$ . Тогда среди нижних пределов интегрирования в каждом интеграле (3.13) имеется  $-h = w(A_j) - w(A_i)$ . Пусть найдена точка максимума функции правдоподобия и в ней  $w(A_j) - w(A_i) > -\infty$ . Очевидно, что если положить  $-h = -\infty$ , то от этого все интегралы увеличатся, и функция правдоподобия возрастет. То есть в оптимальном решении

$$w(A_j) - w(A_i) = -\infty.$$

б) строка, соответствующая разности  $w(A_i) - w(A_j)$ , в явном виде присутствует не во всех структурных матрицах  $C^{(r)}$ .

Очевидно, что для получения несвязного графа необходимо, чтобы все разности вида  $w(A_u) - w(A_q)$ , где  $A_u \in K1$ , а  $A_q \in K2$ , (для краткости назовём их *межкомпонентными разностями*, а разности оценок альтернатив из одинаковых компонент – *внутрикомпонентными*), явно присутствующие в структурных матрицах, были положительными во всех упорядочениях. Пусть найдено оптимальное решение, в котором  $w(A_i) - w(A_j) < \infty$ .

Добавим ко всем полученным оценкам из  $K1$  произвольную положительную константу  $T$ . Тогда все внутрикомпонентные разности не изменятся, а межкомпонентные увеличатся на  $T$ . От этого значение функции правдоподобия возрастет, хотя по предположению, мы уже имеем максимум. Следовательно, в точке точного максимума все межкомпонентные разности, в том числе и  $w(A_i) - w(A_j)$ , равны  $+\infty$ . Теорема доказана.

**Вывод.** Связность графа  $G$  является необходимым и достаточным условием конечности точных ММП-оценок полезностей альтернатив в МЭЭО при экспертном ранжировании обучающей выборки на порядковой шкале. Для решения задачи проверки связности имеется несколько простых методов [38] – метод поиска связывающих маршрутов посредством

поиска в глубину или в ширину, метод определения номеров компонент связности, являющийся составной частью алгоритма Краскала и др.

Данный результат означает, что добавление новых данных на разностно-порядковой шкале не сделает решения конечными, просто внесёт определённое упорядочение в величины бесконечно больших разностей. В этом случае после нормализации результата мы получим вполне определённые и обоснованные соотношения между полезностями.

**Следствие из теорем 3.2 и 3.3.** Все выкладки, приведённые при доказательстве теорем 3.2 и 3.3, основаны на понятии экспертных вероятностей  $p_{ij}$ , найденных по формуле (3.9), согласно модели Терстоуна-Мостеллера. Следовательно, все приведённые выше рассуждения применимы и для названной модели. Иными словами, связность графа  $G$  является необходимым и достаточным условием конечности точных полезностей альтернатив и в процедуре Терстоуна-Мостеллера при экспертном ранжировании обучающей выборки на порядковой шкале.

**Пример 3.5.** Имеем 6 одинаковых упорядочений выборки из трёх альтернатив:  $A_1 \succeq A_2 \succeq A_3$ .

Численное решение, найденное с помощью МЭЭО-ММП при ограничении  $\sum_i \hat{w}_i = 0$  имеет вид  $\hat{w} = (8.2160; 0.0012; -8.2172)$ .

Целевая функция  $L$  в этой точке равна 1. Оценки  $\hat{w}_1$  и  $\hat{w}_3$  расположились почти симметрично относительно  $\hat{w}_2$ . Однако, например, точка  $\hat{w} = (10.2160; 3.0012; -13.2172)$  даёт такое же значение  $L = 1$  и удовлетворяет ограничению. Иными словами, численное решение задачи не определено, а точное решение должно удовлетворять соотношению

$$\hat{w}_1 - \hat{w}_2 \rightarrow +\infty; \quad \hat{w}_2 - \hat{w}_3 \rightarrow +\infty.$$

Аналогичный результат получим с помощью процедуры Терстоуна-Мостеллера, использующей нелинейный МНК. Численное решение будет

иметь вид  $\hat{w} = (10; 0; -10)$ , хотя все варианты, полученные выше посредством МЭЭО-ММП, тоже подходят.

Добавим к исходным данным задачи результат ранжирования на разностно-порядковой шкале, а именно, пусть три эксперта считают, что

$$w(A_1) - w(A_2) > w(A_2) - w(A_3),$$

а три остальных – что

$$w(A_1) - w(A_2) < w(A_2) - w(A_3).$$

Получим следующий численный результат:

$$\hat{w} = (7.714; 1.755 \times 10^{-7}; -7.714).$$

Иными словами  $\frac{\hat{w}_1 - \hat{w}_2}{\hat{w}_2 - \hat{w}_3} = 1$ , поскольку, согласно ранжированию, вероятность превосходства первой разности над второй равна 0.5.

Изменение результатов ранжирования повлечёт иное соотношение между значениями данных разностей.

### 3.3. Комбинированный алгоритм коллективного выбора

На рис. 3.5 – 3.8 приведены графики вероятностных характеристик (см. п. 1.4) различных процедур коллективного выбора в обучающих выборках, полученных в [43], при числе альтернатив равном трём. На рис. 3.5 и 3.6 качество процедуры определяется величиной отклонения данного графика от горизонтальной линии, соответствующей истинному значению полезности оцениваемой альтернативы. На рис. 3.7 и 3.8 качество процедуры определяется значением ординаты графика.

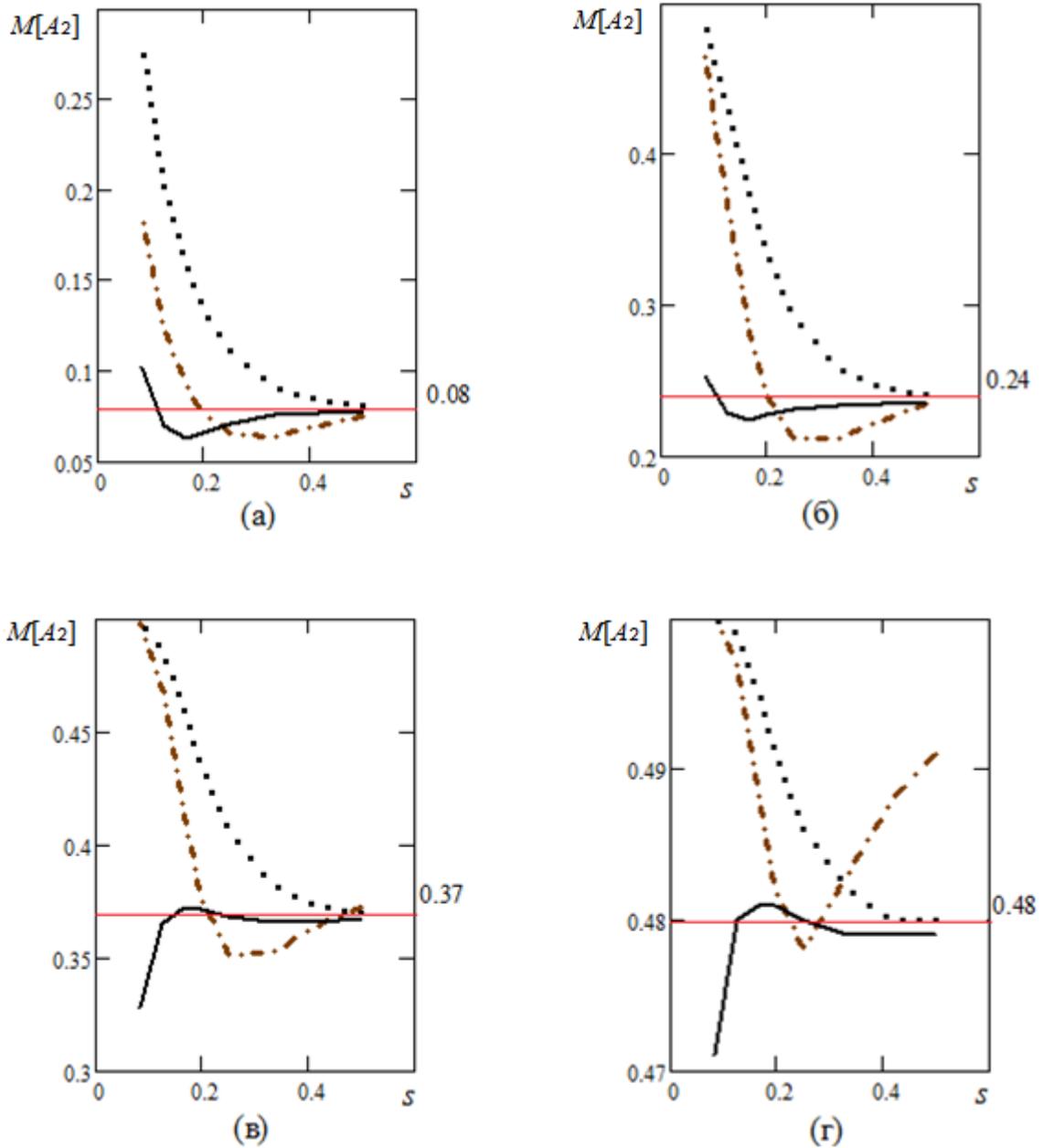


Рис. 3.5. Зависимость математического ожидания оценки полезности средней альтернативы от среднеквадратичного отклонения экспертной оценки при а)  $w_2 = 0.08$ , б)  $w_2 = 0.24$ , в)  $w_2 = 0.37$ , г)  $w_2 = 0.48$  для процедур:   
 ... Терстоуна-Мостеллера;   
 - - - МЭЭО-ММП на порядковой шкале;   
 — МЭЭО-ММП на лингвистической шкале

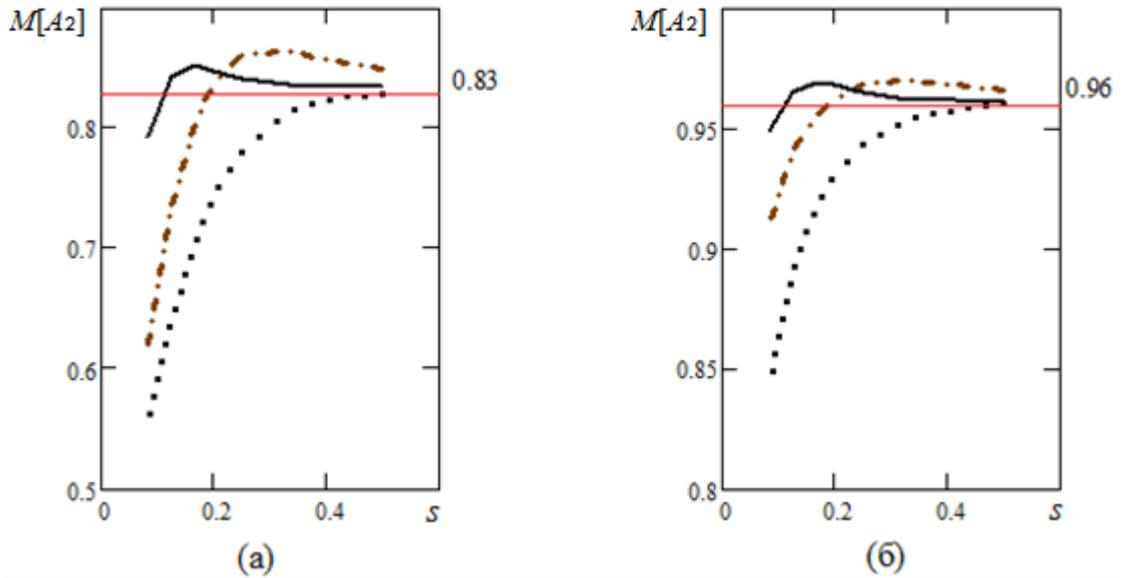


Рис. 3.6. Зависимость математического ожидания оценки полезности средней альтернативы от среднеквадратичного отклонения экспертной оценки при а)  $w_2 = 0.83$ , б)  $w_2 = 0.96$  для процедур:  $\cdots$  Терстоуна-Мостеллера;  $-\cdot-$  МЭЭО-ММП на порядковой шкале;  $—$  МЭЭО-ММП на лингвистической шкале

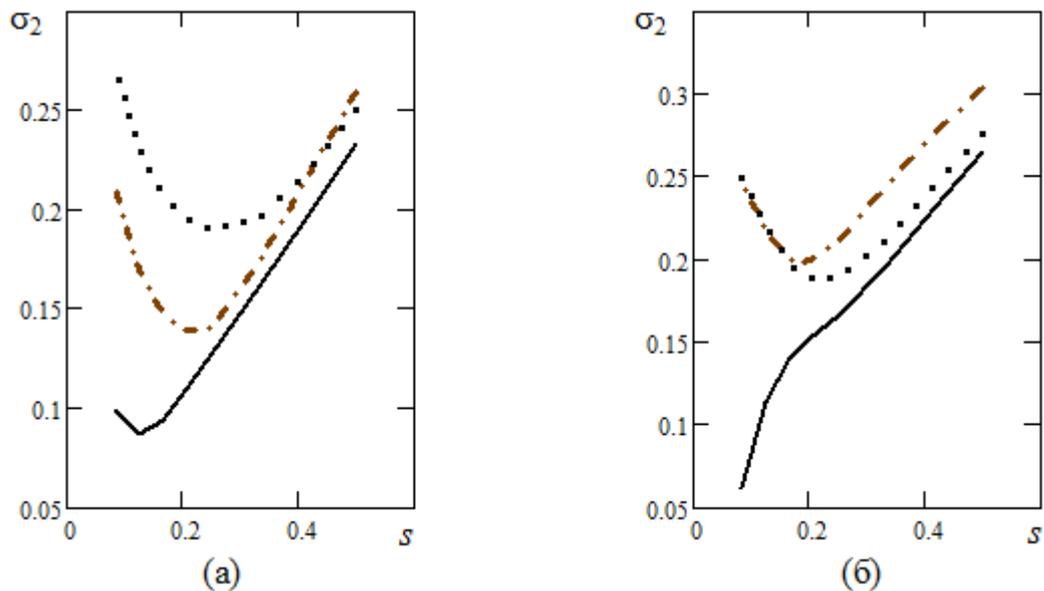


Рис. 3.7. Зависимость среднеквадратичного отклонения оценки полезности средней альтернативы от среднеквадратичного отклонения экспертной оценки при а)  $w_2 = 0.08$ , б)  $w_2 = 0.24$  для процедур:  $\cdots$  Терстоуна-Мостеллера;  $-\cdot-$  МЭЭО-ММП на порядковой шкале;  $—$  МЭЭО-ММП на лингвистической шкале

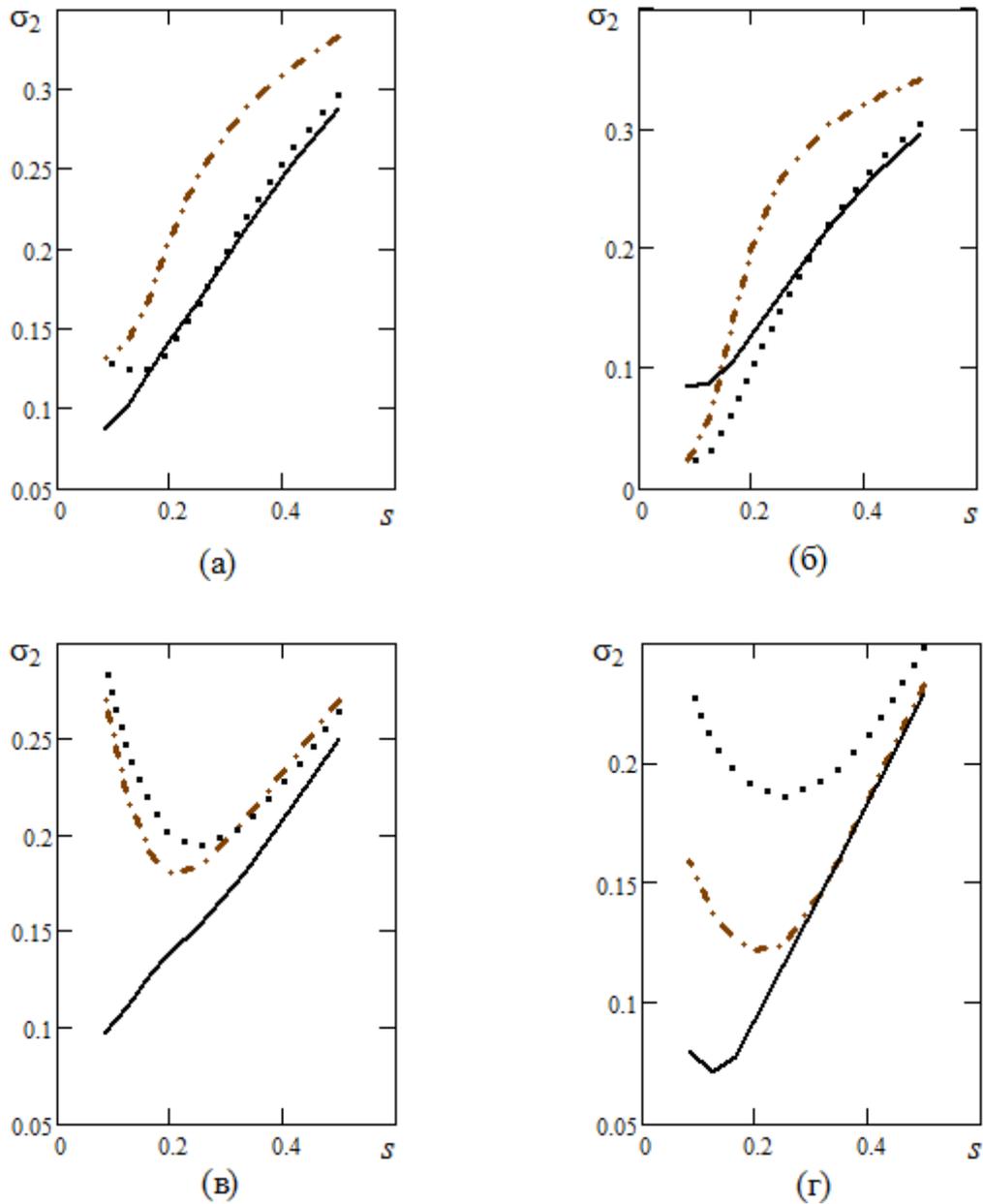


Рис. 3.8. Зависимость среднеквадратичного отклонения оценки полезности средней альтернативы от среднеквадратичного отклонения экспертной оценки при а)  $w_2 = 0.37$ , б)  $w_2 = 0.48$ , в)  $w_2 = 0.83$ , г)  $w_2 = 0.96$  для процедур:  $\dots$  Терстоуна-Мостеллера;  $-\cdot-$  МЭЭО-ММП на порядковой шкале;  $—$  МЭЭО-ММП на лингвистической шкале

Из рисунков видно, что использование лингвистической шкалы (РК-шкалы) в абсолютном большинстве случаев повышает качество выбора, однако, существенного улучшения удаётся добиться только при малых значениях аргумента  $s$  (меньше 0.3 – 0.4). Входной параметр  $s$  в проведённых исследованиях [43] характеризует величину разброса мнений экспертов при

ранжировании обучающей выборки. Численно он равен коэффициенту вариации экспертной оценки полезности лучшей альтернативы выборки. По мере убывания  $s$  уменьшается степень разногласий среди экспертов.

Вывод о незначительности преимущества РК-шкалы при больших  $s$  имеет наглядное объяснение. Будучи более тонким инструментом, чем прочие процедуры, ранжирование на РК-шкале предъявляет более жёсткие требования к зашумлённости входных данных. В противном случае, т.е. при значительном разбросе мнений экспертов, вопрос об улучшении ранжирования не имеет смысла. Проще говоря, бессмысленно просить экспертов про-ранжировать выборку на РК-шкале, если уже на порядковой шкале имеет место значительный разброс мнений.

Таким образом, при использовании адаптивной процедуры коллективного выбора, переключаться на более мощную, по сравнению с порядковой, шкалу имеет смысл лишь при малом разбросе мнений экспертов.

Поэтому при генерации коллективного выбора необходимо разбить профили экспертных упорядочений на классы по степени согласованности индивидуальных экспертных упорядочений и обрабатывать каждый класс специальным методом. В [43] в качестве меры степени согласованности мнений экспертов был выбран коэффициент конкордации ранжирующих упорядочений. Однако в результате проведённых исследований автору не удалось определить граничное значение данного параметра, определяющее «точку переключения» между различными методами. В предлагаемой работе будет сделана попытка связать границу применения разных методов коллективного выбора со связностью графа экспертного упорядочения (см. п. 3.2).

Предыдущие исследования [14, 43] отчётливо показали, что при большой степени противоречий во мнениях экспертов выходные значения полезностей различных альтернатив выборки близки между собой, а по мере роста степени согласованности экспертных ранжировок растёт и степень удалён-

ности полезностей друг от друга. Это, очевидно, связано с тем, что увеличиваются значения экспертных вероятностей превосходства одной альтернативы в паре над другой и, как следствие, увеличиваются значения разностей выходных полезностей (см. выражение 1.11). Для иллюстрации этой закономерности рассмотрим следующие примеры.

**Пример 3.6.** Пусть имеем выборку из четырёх альтернатив со следующими значениями «истинных полезностей»

$$w = (6.443; 3.544; 2.899; 0)^T.$$

Предположим, надо оценить вероятности неравенств, представленных следующей структурной матрицей ранжирования

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.11) имеем следующие значения соответствующих теоретических вероятностей:

$$p^{Tp} = (0.980; 0.676; 0.980; 0.821; 0.821)^T.$$

Проанализируем полученный результат. Сначала рассмотрим первые три соотношения, которые соответствуют ранжированию на порядковой шкале. Предположим, что экспертные вероятности совпадают с теоретическими с точностью  $\pm 0.1$ . Тогда первое и третье неравенства, скорее всего, будут иметь экспертные вероятности равные 1, а второе – от 0.6 до 0.7. Иными словами, граф экспертного упорядочения будет несвязным.

В соответствии с теоремой 3.2 такое ранжирование приведёт к следующим оценкам: 1-я альтернатива бесконечно лучше 2-й и 3-й, 2-я альтернатива превосходит 3-ю примерно на 0.6 – 0.7 единиц, а 4-я альтернатива бесконечно хуже всех остальных. При нулевом значении полезности 4-й альтернативы получим следующие численные оценки полезностей:

$$\hat{w} = (14.663; 8.793; 8.052; 0),$$

что, как видим, существенно отличается от исходных полезностей.

Теперь воспользуемся всеми пятью соотношениями и найдем численные значения оценок полезностей, положив экспертные вероятности 4-го и 5-го неравенств равными 0.8. Получим оценки:

$$\hat{w} = (6.536; 3.651; 2.885; 0),$$

которые практически совпадают с истинными значениями.

**Пример 3.7.** Во втором примере положим

$$w = (4.443; 3.181; 1.211; 0)^T.$$

Теоретические вероятности неравенств, определяемых матрицей  $C$ , будут равны:

$$p^{Tp} = (0.814; 0.918; 0.804; 0.386; 0.378)^T.$$

Как видим, в этом случае отсутствуют крайние значения вероятностей, и граф экспертного упорядочения будет связным. Применяя тот же метод, что и в примере 3.6, т.е. сначала учитывая только ранжирование на порядковой шкале, а затем, привлекая ранжировку на РК-шкале, получим два варианта оценок полезностей:

$$\hat{w} = (4.193; 3.003; 1.190; 0) \text{ и } \hat{w} = (4.192; 3.002; 1.190; 0).$$

Как видим, оценки практически совпадают и близки к истинным значениям.

Из рассмотренных примеров можно сделать следующий вывод. При значительном противоречии мнений экспертов граф экспертного упорядочения оказывается связным, и это может служить признаком того, что достаточно использования порядковой шкалы, поскольку в этом случае применение РК-шкалы не даёт заметного эффекта. При большой согласованности результатов экспертизы, граф оказывается несвязным, и это может означать необходимость подключения РК-шкалы.

Далее данная закономерность будет нами проверяться в процессе численных экспериментов.

**Примечание.** Под коллективным выбором на *комбинированной шкале* оценивания будем подразумевать механизм выработки группового решения, в котором необходимость применения различных методов коллективного выбора (с использованием ранжирования на порядковой или разностно-классификационной шкале) зависит от свойства связности графа экспертного упорядочения.

### 3.4. Исследование состоятельности оценок, полученных модифицированной процедурой Терстоуна-Мостеллера

Напомним, что понятие «состоятельность статистической оценки» предполагает уменьшающуюся до нуля погрешность оценивания при увеличении объёма выборки. Ввиду существования различных толкований термина «погрешность», получают различные виды состоятельности. Среди наиболее часто встречающихся видов состоятельности стоит выделить следующие:

1) *просто состоятельность* (или *слабая состоятельность*), которая опирается на понятие сходимости случайной величины по вероятности.

На формальном языке:  $P\{|a_n - \alpha| > \varepsilon\} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $\varepsilon > 0$ ;

2) *сильная состоятельность*, опирающаяся на понятие сходимости с вероятностью к единице. Формальное обозначение:  $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha\right\} = 1$ ;

3) *состоятельность в среднем квадратичном*. Дисперсия такой оценки стремится к нулю. Формально:  $M[(a_n - \alpha)^2] \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Будем говорить, что многомерная статистика  $a_n$  состоятельно оценивает многомерный параметр  $\alpha$  в каком-либо смысле 1–3, если соответствующая состоятельность имеет место для каждой координаты  $\alpha_i$  либо по некоторой норме  $\|\cdot\|$ .

Чаще всего используют слабую состоятельность, хотя легче всего доказать состоятельность в среднем квадратичном. Тогда слабая состоятельность будет следовать из неравенства Чебышева:

$$P\{|a_n - \alpha| > \varepsilon\} \leq \frac{M[(a_n - \alpha)^2]}{\varepsilon^2}.$$

Связи между различными видами состоятельности:

1. Состоятельность в среднем квадратичном и сильная состоятельность влекут слабую состоятельность.
2. Если нет дополнительной информации, нельзя доказать, что сильная состоятельность влечёт состоятельность в среднем квадратичном или наоборот.

Проведём исследование состоятельности точечных статистических оценок, полученных посредством предлагаемой адаптивной процедуры коллективного выбора.

Сформулируем условия задачи. Производится экспертное ранжирование  $N$  экспертами обучающей выборки из  $m$  альтернатив, в процессе которого каждый эксперт должен ответить утвердительно или отрицательно на вопрос о выполнении каждого неравенства из системы  $Cw \geq 0$ , где  $w$  – вектор полезностей альтернатив выборки,  $C$  – структурная матрица экспертного ранжирования. Количество альтернатив выборки  $m$  и число неравенств  $v$  (строк матрицы  $C$ ) ограничено. По результатам ранжирования определяются экспериментальные вероятности предпочтений по следующей формуле  $q_i = \frac{n_i}{N}$ , где  $n_i$  – число случаев, когда эксперт проголосовал за выполнение  $i$ -го неравенства,  $i = 1, 2, \dots, v$ .

Далее из условия минимума суммы

$$\sum_{i=1}^v [P_i(\theta_N) - q_i]^2 \quad (3.14)$$

вычисляется  $\theta_N$  – статистическая оценка параметра  $\theta$ .

**Теорема 3.4.** Если помимо оговоренных выше условий

1° существует конечное истинное значение векторного параметра распределения экспертных оценок  $\theta^\circ$ ,

2° система необходимых условий экстремума функции (3.14) замкнута в окрестности  $\theta^\circ$ ,

то оценка  $\theta_N$  состоятельна в среднем квадратичном при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. выполняется соотношение

$$M\left[\left(\theta_N - \theta^\circ\right)^2\right] \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Для доказательства нам понадобятся два известных соотношения.

1). Для любых вещественных  $a$  и  $b$  справедливо неравенство

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2. \quad (3.15)$$

2). Для любой случайной величины  $\xi$  справедливо соотношение

$$\xi \geq 0 \Rightarrow M[\xi] \geq 0. \quad (3.16)$$

**Доказательство теоремы.** Обозначим  $P_i(\theta)$  – теоретическая вероятность выполнения  $i$ -го соотношения между полезностями альтернатив, вычисленная при произвольном значении параметра  $\theta$ . Устремим  $N \rightarrow \infty$ . Согласно известной теореме Бернулли, если проводится  $N$  независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие  $A$  происходит с вероятностью  $p$ , то относительная частота появления события  $A$  при  $N \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к  $p$ . То есть

$$\forall \delta > 0 \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m(A)}{N} - p\right| \geq \delta\right\} = 0,$$

где  $m(A)$  – число наступлений события  $A$ . В данном случае, мы имеем дело с совокупностью случайных событий, каждое из которых означает выполнение  $i$ -го соотношения между полезностями альтернатив. К каждому из них теорема Бернулли применима. Следовательно,

$$\forall \delta > 0 \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_i}{N} - P_i(\theta^\circ)\right| \geq \delta\right\} = 0,$$

иными словами, все оценки  $n_i / N$  слабо состоятельны. Кроме того, согласно известным формулам

$$M\left[\frac{m(A)}{N}\right] = p ; M\left[\left(\frac{m(A)}{N} - p\right)^2\right] = \frac{p(1-p)}{N} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Оценки  $q_i = \frac{n_i}{N}$  состоятельны также в среднем квадратичном.

Преобразуем сумму

$$Q_N = \sum_{i=1}^v \left[ P_i(\theta_N) - P_i(\theta^\circ) \right]^2 \quad (3.17)$$

и применим неравенство (3.15) к каждому её слагаемому:

$$\begin{aligned} Q_N &= \sum_{i=1}^v \left[ P_i(\theta_N) - P_i(\theta^\circ) \right]^2 = \sum_{i=1}^v \left[ (P_i(\theta_N) - q_i) + (q_i - P_i(\theta^\circ)) \right]^2 \leq \\ &\leq 2 \sum \left[ P_i(\theta_N) - q_i \right]^2 + 2 \sum \left[ P_i(\theta^\circ) - q_i \right]^2. \end{aligned}$$

Поскольку оценка  $\theta_N$  определяется из условия минимума суммы (3.14), то при любом наборе реализаций случайных величин  $q_i$  справедливо неравенство

$$\sum \left[ P_i(\theta_N) - q_i \right]^2 \leq \sum \left[ P_i(\theta^\circ) - q_i \right]^2.$$

Отсюда по (3.16)

$$M \left[ \sum \left[ P_i(\theta_N) - q_i \right]^2 \right] \leq M \left[ \sum \left[ P_i(\theta^\circ) - q_i \right]^2 \right].$$

Следовательно,

$$M[Q_N] \leq 4M \left[ \sum \left[ P_i(\theta^\circ) - q_i \right]^2 \right].$$

Далее, в силу состоятельности  $\frac{n_i}{N}$ , для любого  $\delta > 0$  и  $i$  можно подоб-

рвать номер  $N_i(\delta)$ , при котором неравенство

$$M \left[ \left( P_i(\theta^\circ) - \frac{n_i}{N} \right)^2 \right] < \frac{\delta}{4 \cdot v} \quad (3.18)$$

выполняется для всех  $N \geq N_i(\delta)$ . Более того, в силу конечности числа оценок  $q_i = \frac{n_i}{N}$ , при  $N \geq \max_i N_i(\delta)$  неравенства (3.18) будут выполняться для всех  $i$  одновременно. Значит, в силу аддитивности операции взятия математического ожидания, имеем

$$M \left[ \sum_{i=1}^v \left[ P_i(\theta_N) - P_i(\theta^\circ) \right]^2 \right] \leq \delta$$

для всех достаточно больших  $N$ . Следовательно, для любого  $i$

$$M \left[ \left( P_i(\theta_N) - P_i(\theta^\circ) \right)^2 \right] \leq \delta.$$

Отсюда, в силу существования и непрерывности обратной функции  $P^{(-1)}(x)$  при  $P(x) \neq 0$ ,  $P(x) \neq 1$ , т.е. при конечном  $x$ , а также в силу условия 2° получим  $M \left[ \left\| \theta_N - \theta^\circ \right\|^2 \right] \leq \varepsilon$  для всех достаточно больших  $N$ . Теорема доказана. Как было сказано выше, из состоятельности в среднем квадратичном следует обычная, т.е. слабая состоятельность.

### 3.5. Описание комбинированного алгоритма на основе адаптивной процедуры Терстоуна-Мостеллера

С учётом положений, сформулированных в предыдущих разделах данной главы, предлагается комбинированный алгоритм на основе адаптивной процедуры Терстоуна-Мостеллера для метода экстраполяции экспертных оценок. Рассмотрим основные этапы этого алгоритма.

1. *Ввод исходных данных.* В качестве исходных данных алгоритм использует набор альтернатив обучающей выборки, выраженный в виде матрицы  $Z(m \times k)$  оценок  $m$  альтернатив по  $k$  критериям качества. Также на данном

этапе задаётся количество  $N$  специалистов-экспертов, участвующих в коллективном выборе.

2. *Экспертный опрос на порядковой шкале.* На этом этапе формируется профиль экспертных упорядочений на порядковой шкале оценивания, заданный в виде матриц парных сравнений  $M^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, N}$ . Структура каждого  $r$ -го ранжирования в профиле выражается соответствующей структурной матрицей  $C^{(r)}$  (см. п.1.3). Алгоритм в автоматическом режиме производит проверку индивидуальных упорядочений профиля на непротиворечивость и допустимость относительно оценок матрицы  $Z$  (см. п. 2.3). В случае если упорядочение  $r$ -го эксперта  $C^{(r)}$  на порядковой шкале порождает противоречия, и при этом эксперт не в состоянии самостоятельно их устранить, то комбинированный алгоритм произведёт адаптацию  $C^{(r)}$  к разностно-классификационной шкале, что позволит на выходе процедуры выбора получить решение, наиболее адекватное коллективному мнению.

3. *Анализ профиля упорядочений на устойчивость.* Вычисляются эмпирические вероятности  $p_u^{\exists}$  выполнения в профиле  $C^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, N}$  всевозможных неравенств  $H_u \cdot w \geq 0$ , порождаемых порядковой шкалой оценивания ( $H_u$  – вектор коэффициентов  $u$ -го неравенства,  $u = \overline{1, h}$ ). Если экспертный профиль состоит только из ранжирований на порядковой шкале, то для расчёта  $p_u^{\exists}$  используется механизм традиционной модели Терстоуна-Мостеллера. Если же среди упорядочений профиля имеют место ранжирования на РК-шкале (полученные в результате адаптации к нетранзитивности), то расчёт  $p_u^{\exists}$  производится согласно предложенной в настоящей работе модифицированной модели Терстоуна-Мостеллера (см. п. 2.4).

Далее на основе рассчитанных значений эмпирических вероятностей  $p_u^{\exists}$  строится бинарное отношение (3.10), геометрическим образом которого является граф экспертного упорядочения  $G$ .

После чего проверяем связность графа  $G$ . Для решения этой задачи в данной работе использовался метод определения номеров компонент связности, являющийся составной частью алгоритма Краскала [38].

3.1. Если граф  $G$  – связный. Следовательно, альтернативы обучающей выборки образуют единую компоненту связности графа, в пределах которой их оценки полезности конечны. Этот факт свидетельствует о том, что профиль экспертных упорядочений устойчив к бесконечным решениям. В таком случае, в рамках решения задачи поиска оценок коэффициентов функции полезности МЭЭО, будет достаточно ограничиться применением модели коллективного выбора на порядковой шкале оценивания – осуществляется переход к этапу 5 ( $H \subset D$ , оптимизация проводится на подмножестве неравенств  $D_u \cdot w \geq 0, u = \overline{1, h}$ ).

3.2. Если граф  $G$  – несвязный. Следовательно, степень согласованности экспертных мнений в профиле достаточно велика. Ввиду этого, альтернативы обучающей выборки образуют больше одной компоненты связности графа экспертного упорядочения (внутрикомпонентные разности между оценками альтернатив будут конечны, а межкомпонентные разности – бесконечны).

Таким образом, имеет место ситуация, когда профиль индивидуальных ранжирований порождает бесконечные решения.

Напомним, что наличие бесконечных решений приводит к значительному смещению полученных на выходе МЭЭО коэффициентов функции полезности, что оказывает существенное влияние на результаты экстраполяции обучающей выборки на исходное множество недоминируемых альтернатив.

В этом случае комбинированный алгоритм предлагает два выхода.

3.2.1. С целью повысить точность искомых оценок коэффициентов функции полезности (тем самым повысить эффективность процесса экстраполяции), ЛПР предлагается воспользоваться методом коллективного выбора, использующим более сильную, по сравнению с порядковой шкалой, РК-шкалу экспертного оценивания выборки альтернатив. Осуществляется

переход к этапу 4;

3.2.2. Найденное условие конечности решения (см. п. 3.2) для исследуемых процедур выбора на основе МЭЭО позволило синтезировать механизм так называемой *регуляризации* обучающей выборки. Этот механизм позволяет ЛПР, руководствуясь информацией о структуре полученных компонент связности графа экспертного упорядочения, сформировать обучающую выборку таким образом, чтобы в её состав входили альтернативы только с устойчивыми статистическими оценками полезности. Это, в свою очередь, даёт возможность значительно повысить эффективность процесса экстраполяции. После генерации новой обучающей выборки осуществляется переход к этапу 1.

4. *Экспертный опрос на разностно-классификационной шкале.* Формируется профиль экспертных упорядочений на РК-шкале. Далее согласно модифицированной модели Терстоуна-Мостеллера, подробное описание которой приведено во второй главе настоящей работы, вычисляются эмпирические вероятности  $p_u^{\exists}$  всевозможных неравенств  $D_u$  ( $u = \overline{1, v}$ ) на РК-шкале. Затем осуществляется переход к этапу 5.

5. *Оптимизация.* Расчёт оценок коэффициентов  $b_j$ ,  $j = \overline{1, k}$  функции полезности МЭЭО и оценок полезности  $w_i = \sum_j Z_{ij} \cdot b_j$ , ( $i = \overline{1, m}$ ) альтернатив обучающей выборки на основе модели Терстоуна-Мостеллера, использующей нелинейный МНК (см. п. 3.1):

$$\Psi = \min \left\{ \sum_u \left[ p_u^{\exists} - U \left( \frac{(D_u)^T (Z b)}{\|D_u\|} \right) \right]^2 \mid b \geq 0 \right\}. \quad (3.19)$$

Обобщённая схема алгоритма адаптивной процедуры выбора на основе МЭЭО представлена на рис. 3.9. По данному алгоритму было разработано программное обеспечение.

**Примечание.** Процедуру коллективного выбора, функционирующую согласно указанному выше комбинированному алгоритму, назовём «адаптивная процедура коллективного выбора на основе МЭЭО». Среди тождественных наименований данной процедуры в дальнейшем, в зависимости от контекста, нами будут употребляться следующие названия: «адаптивная процедура МЭЭО» либо «адаптивная процедура Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО».

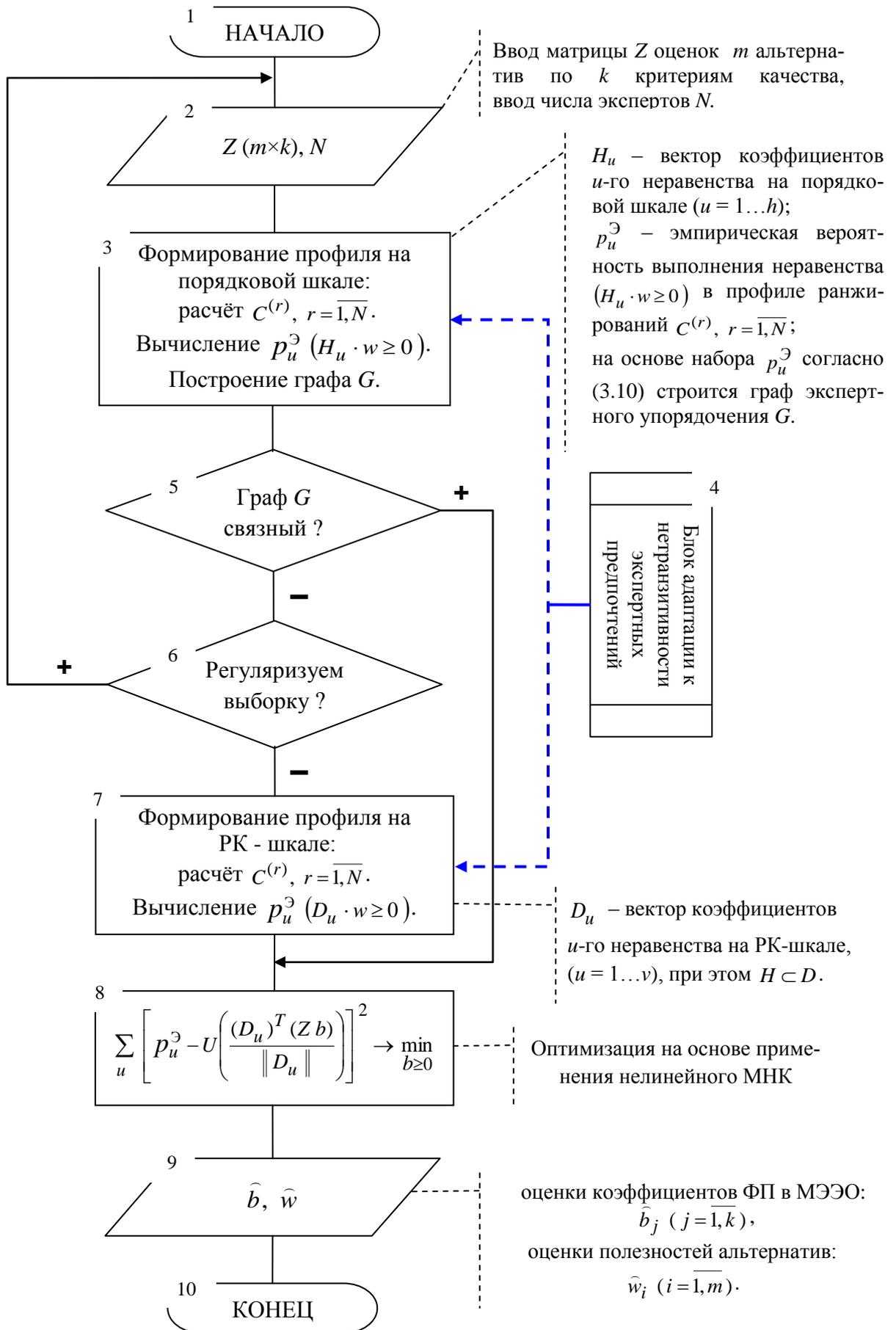


Рис. 3.9. Схема алгоритма адаптивной процедуры выбора на основе МЭЭО

### 3.6. Выводы по главе

1. Разработаны взвешенный МНК и метод непосредственной минимизации суммы квадратов отклонений (нелинейный МНК), имеющие лучшую точность, по сравнению с оригинальным методом линеаризации, предложенным в работах Терстоуна;

2. Выявлены необходимые и достаточные условия конечности оценок полезностей альтернатив, полученных процедурами Терстоуна-Мостеллера и МЭЭО-ММП;

3. Установлено, что в процедурах коллективного выбора, основанных на экстраполяции экспертных оценок, при малом разбросе мнений экспертов в заданном профиле предпочтений, целесообразно, с точки зрения существенного улучшения точности результатов на выходе рассматриваемых процедур, использовать метод коллективного выбора на основе применения разностно-классификационной шкалы (более сильной по сравнению с порядковой). В соответствии с этим, границу применения разных методов коллективного выбора предлагается определять на основе проверки свойства связности графа экспертного упорядочения.

4. Доказана состоятельность статистических оценок, полученных с помощью модифицированной процедуры Терстоуна-Мостеллера.

5. Разработан комбинированный алгоритм коллективного выбора, использующий порядковую или РК-шкалу в зависимости от свойств профиля экспертных предпочтений. Данный алгоритм оснащён механизмом адаптации к нетранзитивным и заведомо несуществующим (относительно оценок альтернатив по частным критериям качества) экспертным ранжированиям.

## ГЛАВА 4. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

### 4.1. Описание специального программного обеспечения

Предлагаемая в настоящей работе модель адаптивной процедуры коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок программно реализована в виде диалоговой информационной системы автоматизированной поддержки принятия решений (далее «адаптивная СППР на основе МЭЭО» или просто «адаптивная СППР»). Информационная система позволяет осуществлять поддержку действий ЛПР в ситуациях многокритериального выбора, когда невозможно или нежелательно иметь автоматическую систему, полностью реализующую весь процесс поиска оптимального решения.

Графический пользовательский интерфейс предлагаемой системы поддержки принятия решений реализован в системе Mathworks Matlab R2012b (8.0). К минимальным системным требованиям, которым должен удовлетворять персональный компьютер конечного пользователя разработанной информационной системы, относятся:

- операционная система Windows XP (32-bit/64-bit) с пакетом обновлений SP3;
- процессор с тактовой частотой не ниже 1.0 ГГц;
- оперативная память не ниже 1 Гб;
- установлена система Mathworks Matlab R2012b (8.0) (в среднем 8 Гб свободного дискового пространства на жёстком диске) или набор библиотек Matlab Compiler Runtime (MCR) для версии Matlab R2012b (8.0) (занимаемое дисковое пространство для MCR минимум 350 Мб);
- наличие в системе элемента управления ActiveX: VSFLEX3;
- монитор, мышь и клавиатура.

Согласно классификации [5], адаптивную СППР на основе МЭЭО следует отнести к типу универсальных систем, которые обеспечивают возможность быстрой настройки на решение определенной задачи в конкретной предметной области.

Система предназначена для группового выбора на основе профиля индивидуальных экспертных упорядочений на неколичественной шкале оценивания альтернатив (порядковой и/или разностно-классификационной). В качестве стратегии ранжирования альтернатив экспертами используется модель парных сравнений.

В функциональной структуре предлагаемого программного обеспечения можно выделить интерфейсную (пользовательскую) и прикладную часть.

Интерфейсная часть адаптивной СППР на основе МЭЭО состоит из подсистем, реализующих выполнение следующих взаимосвязанных этапов:

1. «Ввод исходных данных» – на этом этапе пользователь задаёт исходные данные для решения задачи многокритериального выбора, а именно:

- количество  $m$  альтернативных вариантов выбора;
- количество  $N$  членов экспертной группы, участвующих в анализе и решении поставленной задачи многокритериального выбора;
- матрица  $Z$  векторных оценок альтернатив по частным критериям качества (на этапе формирования обучающей выборки матрица  $Z$  считывается из базы данных).

2. «Опрос экспертов». Реализация данного этапа осуществляется тремя взаимосвязанными подсистемами:

2.1. «Экспертиза на порядковой шкале» – пользователи (эксперты) в режиме диалога с информационной системой ранжируют альтернативы обучающей выборки на порядковой шкале оценивания в соответствии со своими индивидуальными предпочтениями, формируется профиль экспертных упорядочений в виде матриц парных сравнений  $M^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, N}$ ;

2.2. «Анализ профиля экспертных упорядочений на устойчивость» – в случае, если при экспертном оценивании альтернатив обучающей выборки на порядковой шкале сформировался профиль упорядочений, порождающий бесконечные решения, тогда адаптивная система поддержки принятия решений предлагает ЛПР:

- произвести регуляризацию обучающей выборки (см. п. 3.5);
- повысить точность вычисляемых оценок коэффициентов экстраполяции, воспользовавшись методом коллективного выбора, предполагающим экспертное оценивание альтернатив обучающей выборки на более сильной – разностно-классификационной шкалой.

В свою очередь, при наличии устойчивого профиля упорядочений, система осуществляет переход к этапу поиска решения – «Оптимизация».

2.3. «Экспертиза на разностно-классификационной шкале» – формирование профиля экспертных упорядочений в виде матриц парных сравнений  $M^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, N}$  на разностно-классификационной шкале оценивания;

3. «Оптимизация». На этом этапе осуществляется расчёт:

- оценок коэффициентов функции полезности  $(\hat{b}_j, j = \overline{1, k})$ ;
- оценок полезностей альтернатив обучающей выборки  $(\hat{w}_i, i = \overline{1, m})$ .

К прикладной части информационной системы относятся следующие программные модули, обеспечивающие формализованное представление и последующую обработку профиля экспертных упорядочений на порядковой и/или разностно-классификационной шкале оценивания:

- «Генератор неравенств» – модуль, для соответствующей шкалы экспертного оценивания, формирует структурную матрицу  $H$  всех возможных ранжировок между всеми парами из  $m$  альтернатив обучающей выборки ( $H_u$  –  $u$ -я строка матрицы  $H$ , представляющая собой вектор коэффициентов для  $u$ -го неравенства  $H_u \cdot w \geq 0$ ,  $u = \overline{1, h}$ );

- «Генератор структурных матриц» – модуль осуществляет перевод профиля экспертных упорядочений, представленного в виде матриц  $M^{(r)}$  парных сравнений альтернатив, в структурный вид (набор матриц  $C^{(r)}$ );

- «Тестер представимости» – модуль предназначен для расчёта значений экспериментальных вероятностей  $p_u^{\exists}$  представимости каждого неравенства  $H_u \cdot w \geq 0$  в профиле упорядочений  $C^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, N}$  (см. п. 2.4);

- «Тестер транзитивности» – модуль обеспечивает проверку и, в случае необходимости, исправление противоречивости в экспертных упорядочениях профиля. Функционал модуля основан на применении алгоритмов «Поиск контура» и «Исправление контура» (см. п. 2.3);

- «Тестер допустимости» – модуль осуществляет проверку экспертных упорядочений профиля на допустимость относительно заданной матрицы оценок полезностей альтернатив по частным критериям качества (см. п. 2.3).

Общая схема программного обеспечения представлена на рис. 4.1.



Рис. 4.1. Структура специального программного обеспечения.

В приложении 1 приведено подробное описание процесса взаимодействия конечного пользователя с предлагаемым программным обеспечением.

Разработанный программный комплекс прошёл апробацию на предприятии по производствупельменей и полуфабрикатов КФХ «Борть», после чего был внедрён в производственный процесс данного предприятия.

## 4.2. Вычислительные эксперименты по анализу адаптивной процедуры

### 4.2.1. Решение практической задачи

В соответствии с синтезированным в предыдущей главе комбинированным алгоритмом на основе адаптивной процедуры Терстоуна-Мостеллера для МЭЭО, опишем работу адаптивной СППР на примере многокритериальной задачи выбора наилучшей структуры линии фотолитографии [15, 69].

Пусть имеется обучающая выборка, состоящая из четырех альтернативных вариантов структуры линии фотолитографии  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ , характеризующихся пятью критериями качества: коэффициентом готовности, удельными приведенными затратами, годовой программой выпуска, стоимостью комплекта оборудования, уровнем межоперационных заделов. Нормированные безразмерные значения этих критериев представлены в таблице 4.1. Все указанные критерии необходимо максимизировать. Для осуществления коллективного выбора была сформирована группа из шести ( $N = 6$ ) специалистов-экспертов в данной предметной области.

Таблица 4.1

Параметры структур

№ структуры	Коэффициент готовности	Приведенные затраты	Годовая программа	Стоимость комплекта	Уровень межоперационных заделов
1	0.7143	0.8182	0.2939	0.7339	0.9356
2	0.9048	1	0.7777	0.2974	0.6411
3	0.7619	1	0.7937	0.2665	0.6320
4	0.6190	1	0.8078	0.2356	0.6271

Эксперты имеющуюся обучающую выборку из четырёх альтернатив проранжировали на разностно-классификационной шкале оценивания следующим образом.

Первый эксперт:

$$(A_2, A_3) \in Q_1, (A_3, A_4) \in Q_1, (A_4, A_1) \in Q_1.$$

Матрица  $C^{(1)}$ , характеризующая структуру такого упорядочения, имеет вид

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Второй эксперт:

$$(A_2, A_4) \in Q_1, (A_4, A_3) \in Q_1, (A_3, A_1) \in Q_1.$$

В результате имеем структурную матрицу  $C^{(2)}$  следующего вида

$$C^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Третий эксперт:

$$(A_3, A_2) \in Q_1, (A_2, A_4) \in Q_1, (A_4, A_1) \in Q_1.$$

Соответствующая данному ранжированию структурная матрица  $C^{(3)}$  имеет вид

$$C^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Четвертый эксперт:

$$(A_2, A_3) \in Q_0, (A_3, A_4) \in Q_0, (A_2, A_4) \in Q_1, (A_4, A_1) \in Q_2.$$

Таким образом, имеем матрицу  $C^{(4)}$ , отображающую структуру упорядочения четвёртого эксперта

$$C^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Пятый эксперт:

$$(A_2, A_4) \in Q_1, (A_4, A_3) \in Q_0, (A_3, A_1) \in Q_2, (A_4, A_1) \in Q_2.$$

В результате данного ранжирования имеем матрицу  $C^{(5)}$  вида

$$C^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Шестой эксперт:

$$(A_3, A_2) \in Q_0, (A_2, A_4) \in Q_1, (A_4, A_1) \in Q_2.$$

Соответствующая такому ранжированию структурная матрица  $C^{(6)}$  имеет вид

$$C^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Адаптивная система на основе сформированного профиля экспертных ранжирований вычислила значения оценок коэффициентов  $b$  функции полезности МЭЭО (с учётом ограничения  $b_j \geq 0$ ). После нормировки  $\sum b_j = 1$  получим следующие оценки:

$$\hat{b}_1 = 0.2578; \quad \hat{b}_2 = 0.7396; \quad \hat{b}_3 = 0.0026; \quad \hat{b}_4 = 0; \quad \hat{b}_5 = 0.$$

Оценки полезности альтернатив обучающей выборки при таком наборе коэффициентов имеют следующие значения:

$$\widehat{w}_1 = 0.790; \quad \widehat{w}_2 = 0.975; \quad \widehat{w}_3 = 0.938; \quad \widehat{w}_4 = 0.901.$$

Результирующее упорядочение объектов выбора имеет вид:

$$X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1.$$

Исходя из рассчитанных численных значений полезностей альтернатив, можно положить, что варианты  $X_2$  и  $X_3$ ,  $X_3$  и  $X_4$  довольно близки между собой. В этом несложно убедиться, если сравнить численные полезности этих альтернатив. В результате такого сравнения получим, что разницы  $\Delta_{23} = \widehat{w}_2 - \widehat{w}_3$  и  $\Delta_{34} = \widehat{w}_3 - \widehat{w}_4$  составляют примерно 6 %, а разность  $\Delta_{24} = \widehat{w}_2 - \widehat{w}_4$  равна 12 %. В свою очередь, исходя из разницы между полезностями  $X_1$  и  $X_2, X_3, X_4$  (она составляет примерно 25 %), можно заключить, что  $X_1$  намного хуже остальных вариантов выбора.

Таким образом, анализируя профиль экспертных упорядочений и полученные на его основе результаты, можно сделать вывод, что разработанная адаптивная СППР на основе МЭЭО функционирует корректно.

В работе [15], рассматриваемая нами задача выбора наиболее эффективной структуры линии фотолитографии решалась на основе использования процедуры МЭЭО-ММП (см. п. 1.3). В результате применения этой процедуры получались следующие значения оценок коэффициентов функции полезности:  $\widehat{b}_1 = 0.2236$ ;  $\widehat{b}_2 = 0.0398$ ;  $\widehat{b}_3 = 0.5468$ ;  $\widehat{b}_4 = 0.0238$ ;  $\widehat{b}_5 = 0.1660$ . Такой картеж коэффициентов формирует следующие значения оценок полезности альтернатив выборки:  $\widehat{w}_1 = 0.5258$ ;  $\widehat{w}_2 = 0.7808$ ;  $\widehat{w}_3 = 0.7554$ ;  $\widehat{w}_4 = 0.7296$ .

В соответствии с этим, результирующее ранжирование объектов выбора имеет вид:  $X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$ . Этому варианту итогового упорядочения альтернатив полностью соответствует коллективное ранжирование, полученное выше с помощью адаптивной процедуры МЭЭО. Однако стоит отметить, что согласно [15], разница между найденными процедурой МЭЭО-ММП по-

лезностями  $X_2$  и  $X_3$ ,  $X_3$  и  $X_4$  составляет 3%, а для  $X_2$  и  $X_4$  она равна 6%. Следовательно, альтернативы  $X_2, X_3$  и  $X_4$  разделены хуже, чем при использовании адаптивной процедуры МЭЭО. Однако, согласно профилю экспертных упорядочений:

$X_2 \succ X_3$  – указали 3 эксперта,  $X_3 \succ X_2$  – 1 эксперт,  $X_2 \approx X_3$  – 2 эксперта;

$X_3 \succ X_4$  – указали 3 эксперта,  $X_4 \succ X_3$  – 1 эксперт,  $X_3 \approx X_4$  – 2 эксперта;

$X_2 \succ X_4$  – указали все 6 экспертов.

Откуда видно, что большинством голосов эксперты достаточно чётко разделили варианты  $X_2, X_3$  и  $X_4$ . Таким образом, анализируя разницы между полезностями альтернатив  $X_2, X_3$  и  $X_4$ , полученными процедурами МЭЭО-ММП и адаптивной МЭЭО можно заключить, что адаптивная процедура выбора показывает более адекватные экспертизе результаты. А значит, в данном случае, адаптивная процедура МЭЭО позволяет добиться большей точности искомых оценок коэффициентов функции полезности. Это, в свою очередь, приведёт к повышению эффективности экстраполяции обучающей выборки на всё исходное множество вариантов выбора.

#### **4.2.2. Иллюстративные примеры применения адаптивной процедуры выбора на основе МЭЭО**

На примере решения всё той же задачи выбора наилучшей структуры линии фотолитографии покажем ключевые особенности работы алгоритма адаптивной процедуры коллективного выбора на основе МЭЭО в зависимости от:

- структуры полученного профиля экспертных упорядочений (порождает бесконечные решения либо нет);
- наличия в профиле противоречивых и/или недопустимых экспертных упорядочений.

Исходные данные задачи выбора приведены в таблице 4.1. Количество экспертов, участвующих в опросе, примем равным пяти ( $N = 5$ ).

**Пример 4.1.** Граф экспертного упорядочения – связный. Профиль упорядочений устойчив к бесконечным решениям.

**Шаг 1. Экспертный опрос на порядковой шкале.** Коллективу экспертов было предложено проранжировать имеющийся набор альтернатив  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$  на порядковой шкале оценивания.

Пусть в результате экспертизы сформировался следующий профиль ранжирований, заданный в виде матриц парных сравнений альтернатив:

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad M^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad M^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad M^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Тогда структурные матрицы  $C^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, N}$  индивидуальных упорядочений экспертов примут вид:

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверка профиля на непротиворечивость предпочтений показала, что ранжирование третьего эксперта  $C^{(3)}$  порождает противоречия: имеет место контур « $X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_1$ ». Предположим, что самостоятельно эксперт

№3 не смог избавиться от возникших ошибок транзитивности предпочтений. Вследствие этого, СППР в автоматическом режиме адаптирует ранжирование  $M^{(3)}$  к разностно-классификационной шкале оценивания, установив между альтернативами контура отношение неразличимости (см. п. 2.3):

$$\left[ M^{(3)} \right]^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ Q_1 & Q_1 & Q_1 & Q_0 & Q_0 & Q_0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Проверка экспертных упорядочений на допустимость относительно матрицы оценок альтернатив по частным критериям качества показала, что все индивидуальные ранжирования корректны.

**Шаг 2. Анализ профиля упорядочений на устойчивость.** Генерируется структурная матрица  $H$  (см. таблица 4.2) коэффициентов всевозможных неравенств, которые могут возникнуть при ранжировании на порядковой шкале оценивания обучающей выборки, состоящей из четырёх альтернатив. Далее для каждого  $u$ -го неравенства  $H_u$  ( $u = \overline{1,6}$ ) адаптивная система в автоматическом режиме рассчитывает экспериментальную вероятность  $p_u^{\exists}$  его представимости в профиле ранжирований. Так как в данном случае экспертный профиль помимо порядковых ранжирований содержит в своём составе ранжирование  $M^{(3)}$  на разностно-классификационной шкале оценивания, то для корректного расчёта  $p_u^{\exists}$  необходимо воспользоваться механизмом вычисления экспериментальных вероятностей неравенств согласно модифицированной процедуре Терстоуна-Мостеллера (см. п. 2.4).

Таблица 4.2.

Номер неравенства		1	2	3	4	5	6
Матрица неравенств $H$	$X_1$	1	1	1	0	0	0
	$X_2$	-1	0	0	1	1	0
	$X_3$	0	-1	0	-1	0	1
	$X_4$	0	0	-1	0	-1	-1
$p^{\exists}$		0.2	0.3	0.5	1	1	0.7

На основе найденных вероятностей  $p_{ii}^{\exists}$  строится бинарное отношение (3.10), геометрическим образом которого является неориентированный граф экспертного упорядочения  $G$ . Для данного примера структура графа  $G$  представлена на рис. 4.2. Откуда видно, что граф экспертного упорядочения является связным, вследствие чего, можно сделать вывод, что полученный в результате опроса экспертов профиль индивидуальных упорядочений – устойчив к бесконечным решениям. А значит, для поиска оценок коэффициентов функции полезности МЭЭО, будет достаточно ограничиться применением модели коллективного выбора на порядковой шкале экспертного оценивания.

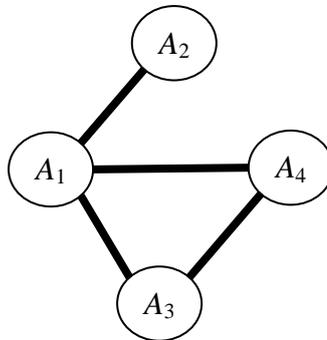


Рис. 4.2. Связный граф экспертного упорядочения

**Шаг 3. Оптимизация.** Автоматизированная система, на основе полученного профиля ранжирований вычислила оценки коэффициентов функции полезности МЭЭО, нормированные значения которых имеют вид:

$$\hat{b}_1 = 0.3307; \quad \hat{b}_2 = 0.4459; \quad \hat{b}_3 = 0.0106; \quad \hat{b}_4 = 0.0024; \quad \hat{b}_5 = 0.2104.$$

При таком картеже коэффициентов получают следующие оценки полезностей альтернатив:

$$\hat{w}_1 = 0.8028; \quad \hat{w}_2 = 0.8890; \quad \hat{w}_3 = 0.8399; \quad \hat{w}_4 = 0.7917.$$

Результатирующее упорядочение альтернатив обучающей выборки:

$$X_2 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_4.$$

Таким образом, анализируя профиль экспертных упорядочений и полученные на его основе результаты, можно заключить, что разработанная система поддержки принятия решений функционирует корректно.

**Пример 4.2.** Граф экспертного упорядочения – несвязный. Профиль упорядочений порождает бесконечные решения.

**Шаг 1. Экспертный опрос на порядковой шкале.** Пусть коллектив экспертов проранжировал альтернативы обучающей выборки на порядковой шкале следующим образом:

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad M^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad M^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad M^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Все упорядочения профиля – непротиворечивы и допустимы.

**Шаг 2. Анализ профиля упорядочений на устойчивость.** В соответствии с полученным профилем упорядочений на порядковой шкале оценивания были рассчитаны значения вероятностей  $p_u^\exists$ ,  $u = \overline{1,6}$  (см. таблицу 4.3).

Таблица 4.3.

номер неравенства		1	2	3	4	5	6
матрица коэффициентов $H$	$X_1$	1	1	1	0	0	0
	$X_2$	-1	0	0	1	1	0
	$X_3$	0	-1	0	-1	0	1
	$X_4$	0	0	-1	0	-1	-1
$p^\exists$		0	0.4	0.6	1	1	0.8

Граф экспертного упорядочения  $G$ , построенный на основе рассчитанных  $p_u^\exists$ , имеет структуру, представленную на рис. 4.3.

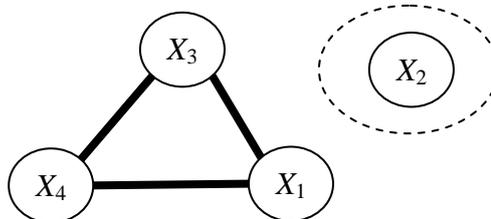


Рис. 4.3. Несвязный граф экспертного упорядочения

Откуда видно, что альтернатива  $X_2$  соответствует изолированной вершине графа  $G$ . Таким образом, граф экспертного упорядочения получился

несвязным. На основании положений о существовании конечного решения в МЭЭО, сформулированных в предыдущей главе (см. п. 3.2), при данном профиле упорядочений альтернатива  $X_2$  будет иметь бесконечную оценку полезности. Как было отмечено в первой главе (см. п. 1.4), бесконечные решения приводят к значительной потере точности искомым коэффициентов функции полезности МЭЭО, что влечёт за собой снижение качества результата при осуществлении процесса экстраполяции.

В сложившейся ситуации, в соответствии с алгоритмом адаптивной процедуры МЭЭО, возможны два выхода.

1. Автоматизированная система предложит ЛПР произвести регуляризацию обучающей выборки (см. п. 3.5). Согласно рассматриваемому примеру, осуществление регуляризации приведёт к исключению из исходной обучающей выборки  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$  альтернативы  $X_2$ , имеющей бесконечную оценку полезности. В результате этого, адаптированная к бесконечным решениям обучающая выборка примет вид:  $X^* = (X_1, X_3, X_4)$ . Далее адаптивная СППР предложит экспертам снова воспользоваться порядковой шкалой оценивания, на которой от них потребуется произвести ранжирование альтернатив уже новой обучающей выборки  $X^*$  (возврат к шагу 1).

2. Автоматизированная система предложит экспертам проранжировать альтернативы обучающей выборки  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$  на более сильной по сравнению с порядковой – разностно-классификационной шкале. Такой метод ранжирования альтернатив позволяет сузить область допустимых значений коэффициентов  $b_j$  функции полезности МЭЭО и тем самым значительно повысить точность их оценки.

**Шаг 3. Экспертный опрос на разностно-классификационной шкале.** Пусть в результате опроса экспертов на РК-шкале оценивания сформировался следующий профиль индивидуальных упорядочений:

$$\begin{aligned}
 M^{(1)} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & Q1 \\ 2 & 3 & Q2 \\ 2 & 4 & Q2 \\ 1 & 3 & Q1 \\ 1 & 4 & Q1 \\ 4 & 3 & Q0 \end{bmatrix} & M^{(2)} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & Q2 \\ 2 & 3 & Q1 \\ 2 & 4 & Q4 \\ 3 & 1 & Q1 \\ 3 & 4 & Q3 \\ 1 & 4 & Q2 \end{bmatrix} & M^{(3)} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & Q1 \\ 2 & 3 & Q1 \\ 2 & 4 & Q1 \\ 1 & 3 & Q0 \\ 3 & 4 & Q0 \\ 4 & 1 & Q0 \end{bmatrix} \\
 M^{(4)} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & Q3 \\ 2 & 3 & Q1 \\ 2 & 4 & Q1 \\ 3 & 4 & Q0 \\ 3 & 1 & Q2 \\ 4 & 1 & Q2 \end{bmatrix} & M^{(5)} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & Q4 \\ 2 & 3 & Q1 \\ 2 & 4 & Q2 \\ 3 & 4 & Q1 \\ 3 & 1 & Q3 \\ 4 & 1 & Q2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

В структурном виде упорядочения профиля будут выглядеть как

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C^{(5)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Все экспертные упорядочения в профиле – непротиворечивы и допустимы. Список возможных неравенств, порождаемых РК-шкалой при числе альтернатив равном четырём, приведён в таблице 4.4. Там же указаны значения экспериментальных вероятностей  $p_u^{\exists}$ ,  $u = \overline{1,21}$  выполнения этих неравенств в профиле упорядочений.

Таблица 4.4.

номер неравенства	матрица коэффициентов $H$				$p^{\exists}$
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
1	1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	0	0.3
3	1	0	0	-1	0.5
4	0	1	-1	0	1
5	0	1	0	-1	1
6	0	0	1	-1	0.7
7	2	-1	-1	0	0.1
8	2	-1	0	-1	0.2
9	1	-2	1	0	0
10	1	-2	0	1	0
11	1	-1	1	-1	0.2
12	1	-1	-1	1	0
13	2	0	-1	-1	0.5
14	1	1	-2	0	0.5
15	1	1	-1	-1	0.6
16	1	0	-2	1	0.3
17	1	1	0	-2	0.7
18	1	0	1	-2	0.5
19	0	2	-1	-1	1
20	0	1	-2	1	0.7
21	0	1	1	-2	1

**Шаг 4. Оптимизация.** Система поддержки принятия решений, на основе полученного профиля экспертных упорядочений на РК-шкале, осуществила поиск оценок коэффициентов функции полезности МЭЭО:

$$\hat{b}_1 = 0.2956; \quad \hat{b}_2 = 0.4999; \quad \hat{b}_3 = 0.0016; \quad \hat{b}_4 = 0.0007; \quad \hat{b}_5 = 0.2022.$$

Оценки полезности альтернатив, согласно таким коэффициентам, равны:

$$\hat{w}_1 = 0.8103; \quad \hat{w}_2 = 0.8985; \quad \hat{w}_3 = 0.8544; \quad \hat{w}_4 = 0.8111.$$

Имеем следующее результирующее упорядочение:  $X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$ .

В примерах 4.1 и 4.2 все экспертные упорядочения в профилях являются «допустимыми» относительно исходных векторных оценок альтернатив. Напомним, что во второй главе настоящей работы рассматривался вопрос о негативном влиянии «недопустимых» упорядочений на итоговый результат выбора в процедурах, основанных на МЭЭО.

Учитывая этот факт, адаптивная система на основе МЭЭО оснащена механизмом, который позволяет в ходе опроса оперативно информировать экспертов о возникших недопустимых упорядочениях. На иллюстрирующем примере покажем, как отразиться на итоговом результате, полученном на выходе адаптивной СППР, тот факт, если, несмотря на предупреждение системы, среди упорядочений экспертов всё-таки окажутся – недопустимые.

**Пример 4.3.** Пусть имеем матрицу  $Z$  оценок четырёх альтернатив по частным критериям, приведённую в таблице 4.1. Предположим, что в результате опроса пяти экспертов ( $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$ ) на порядковой шкале оценивания сформировался следующий профиль упорядочений (в скобках указаны номера альтернатив):

$$\mathcal{E}_1: [4 \succ 1 \succ 3 \succ 2]; \quad \mathcal{E}_2: [3 \succ 1 \succ 2 \succ 4]; \quad \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4 \text{ и } \mathcal{E}_5: [3 \succ 4 \succ 1 \succ 2].$$

Проверка профиля на допустимость упорядочений показала, что ни одно из предложенных экспертами ранжирований не существует (при неотрицательных весах) относительно заданной матрицы  $Z$ . Данный профиль порождает связный граф экспертного упорядочения. Следовательно, в соответствии с комбинированным алгоритмом адаптивной процедуры МЭЭО имеем следующие оценки коэффициентов функции полезности:

$$\hat{b}_1 = 0; \quad \hat{b}_2 = 0; \quad \hat{b}_3 = 0.3811; \quad \hat{b}_4 = 0; \quad \hat{b}_5 = 0.6189.$$

Оценки полезности альтернатив, соответствующие такому набору коэффициентов:  $\hat{w}_1 = 0.6910$ ;  $\hat{w}_2 = 0.6932$ ;  $\hat{w}_3 = 0.6936$ ;  $\hat{w}_4 = 0.6960$ .

Результирующее упорядочение примет вид:  $X_4 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_1$ . Видно, что альтернативы выборки разделены очень слабо. Более того, полученное коллективное упорядочение не поддаётся объяснению с точки зрения имеюще-

гося профиля ранжирований. Так, например, согласно профилю экспериментальные вероятности предпочтений  $X_1 \succ X_2$  и  $X_3 \succ X_4$  равны 1 и 0.8 соответственно, однако в результирующем упорядочении имеют место предпочтения  $X_2 \succ X_1$  и  $X_4 \succ X_3$ .

#### 4.2.3. Вероятностный анализ адаптивной процедуры выбора

Используя вероятностный метод анализа процедур коллективного выбора (см. п. 1.4), для случая трёх альтернатив ( $m = 3$ ) и пяти экспертов ( $N = 5$ ) произведём сравнение адаптивной процедуры Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО (или адаптивной процедуры МЭЭО):

I) с традиционной процедурой Терстоуна-Мостеллера, а также с различными моделями выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера, отличающимися определённым сочетанием шкалы экспертного оценивания и механизма оптимизации (линеаризованный, взвешенный, нелинейный МНК), а именно: линеаризованная процедура на РК-шкале, линеаризованная процедура на комбинированной шкале, взвешенная процедура на РК-шкале, взвешенная процедура на комбинированной шкале, нелинейная процедура на порядковой шкале, нелинейная процедура на РК-шкале;

II) с другими известными на данный момент процедурами выбора, которые можно использовать для сужения исходного множества недоминируемых альтернатив посредством экстраполяции экспертных оценок, а именно процедурами: Борда, Сыроева-Чирко-Десятова, МЭЭО-ММП на порядковой шкале, МЭЭО-ММП на разностно-классификационной шкале (подробное описание этих процедур приведено в первой главе настоящей работы).

Сравнение вышеуказанных процедур коллективного выбора проведём по следующим вероятностным характеристикам, которые можно вычислить исходя из распределения (1.13):

– величина смещения математического ожидания  $M[A_2]$  оценки полезности средней альтернативы  $A_2$  от истинного значения  $w_2$ ;

– среднеквадратичное отклонение  $\sigma_2$  оценки полезности средней альтернативы  $A_2$  от истинного значения  $w_2$ ;

Возможны следующие шесть (3!) вариантов упорядочения трёх альтернатив ( $A_1, A_2, A_3$ ) на порядковой шкале экспертного оценивания:

$$A_1 \succeq A_2 \succeq A_3; A_1 \succeq A_3 \succeq A_2; A_2 \succeq A_1 \succeq A_3;$$

$$A_2 \succeq A_3 \succeq A_1; A_3 \succeq A_1 \succeq A_2; A_3 \succeq A_2 \succeq A_1.$$

При  $m = 3$  и  $N = 5$  число различных профилей упорядочений на порядковой шкале равно 252 (число 5-сочетаний с повторениями из 3!).

В свою очередь, согласно [43], для РК-шкалы экспертного оценивания число возможных вариантов упорядочения трёх альтернатив принималось равным двенадцати ( $2 \cdot 3!$ ), в силу того, что каждому упорядочению на порядковой шкале  $A_{t_1} \succeq A_{t_2} \succeq A_{t_3}$  ( $t = \overline{1, m!}$ ) было поставлено в соответствие два варианта на РК-шкале:

$$\begin{cases} (A_{t_1}, A_{t_2}) \in Q_2, \\ (A_{t_2}, A_{t_3}) \in Q_1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (A_{t_1}, A_{t_2}) \in Q_1, \\ (A_{t_2}, A_{t_3}) \in Q_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Тогда число различных профилей индивидуальных упорядочений на РК-шкале равно 4368 (число 5-сочетаний с повторениями из  $[2 \cdot 3!]$ ).

Для исследуемых нами по вероятностному методу анализа процедур выбора, которые используют в качестве вспомогательной структуры экспертного оценивания вариантов – только порядковую или только разностно-классификационную шкалу, оценки полезности альтернатив при каждом возможном профиле упорядочений рассчитывались в соответствии (либо аналогично) с методикой, приведенной в [43].

В свою очередь, для процедур выбора, использующих комбинированный метод экспертного оценивания (см. п. 3.3), оценки полезности  $\widehat{W}_z^{km} = \{ \widehat{w}_z(A_1), \widehat{w}_z(A_2), \widehat{w}_z(A_3) \}$  при профиле ранжирований  $z$  найдены как

$$\widehat{W}_z^{km} = \widehat{W}_z^{pr} \cdot SV_z + \widehat{W}_z^{rk} \cdot (1 - SV_z),$$

где  $SV_z$  - переменная-переключатель, которая при заданном профиле  $z$  в случае связного (несвязного) графа экспертного упорядочения принимает значение 1(0);  $\widehat{W}_z^{pr}$  и  $\widehat{W}_z^{rk}$  - вектора оценок полезности альтернатив на выходе рассматриваемых процедур выбора, полученные при заданном профиле  $z$  на основе применения порядковой и разностно-классификационной шкалы.

Расчёт вероятностных характеристик для процедур, использующих комбинированный метод оценивания, будем производить на множестве экспертных профилей, порождаемых РК-шкалой. Это объясняется тем, что согласно допущению (4.1), система  $S_{rk}$  идентифицирующих неравенств, порождаемых РК-шкалой, предполагает наличие в своём составе системы  $S_{pr}$  идентифицирующих неравенств, порождаемых порядковой шкалой экспертного оценивания:  $S_{pr} \subset S_{rk}$  (см. п. 2.1).

Например, система идентифицирующих неравенств для упорядочения  $A_1 \succeq A_2 \succeq A_3$  на порядковой шкале выглядит так

$$S1 = \begin{cases} w_1 - w_2 \geq 0; \\ w_1 - w_3 \geq 0; \\ w_2 - w_3 \geq 0; \end{cases}$$

Этому упорядочению альтернатив соответствуют два варианта ранжирования на РК-шкале

$$\begin{aligned} (A_1, A_2) \in Q_2, \quad (A_1, A_3) \in Q_3, \quad (A_2, A_3) \in Q_1 \\ (A_1, A_2) \in Q_1, \quad (A_1, A_3) \in Q_3, \quad (A_2, A_3) \in Q_2, \end{aligned}$$

которые порождают системы неравенств

$$S2 = \begin{cases} w_1 - w_2 \geq 0; \\ w_1 - w_3 \geq 0; \\ w_2 - w_3 \geq 0; \\ w_1 - 2w_2 + w_3 \geq 0; \\ w_1 + w_2 - 2w_3 \geq 0; \\ 2w_1 - w_2 - w_3 \geq 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad S3 = \begin{cases} w_1 - w_2 \geq 0; \\ w_1 - w_3 \geq 0; \\ w_2 - w_3 \geq 0; \\ -w_1 + 2w_2 - w_3 \geq 0; \\ w_1 + w_2 - 2w_3 \geq 0; \\ 2w_1 - w_2 - w_3 \geq 0. \end{cases}$$

Несложно заметить, что неравенства системы  $S1$  для упорядочения на порядковой шкале входят в состав систем неравенств  $S2$  и  $S3$ , порождаемых упорядочениями на РК-шкале оценивания.

Для каждого из 4368 профилей упорядочений, согласно [43], определены экспериментальные вероятности неравенств, представленных следующей структурной матрицей ранжирования

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

В случае связного графа экспертного упорядочения при  $z$ -ом профиле, оценки полезности альтернатив  $\widehat{W}_z^{km}$ , на выходе рассматриваемых процедур выбора, будем определять по вероятностям неравенств, представленных первыми тремя строками матрицы  $C$  и соответствующих ранжированию на порядковой шкале. В противном случае, когда граф экспертного упорядочения – несвязный, для расчета  $\widehat{W}_z^{km}$  будем применять значения эмпирических вероятностей всех неравенств матрицы  $C$ , что соответствует модели выбора на РК-шкале экспертного оценивания.

Г). В рамках вычислительного эксперимента по расчёту вероятностных характеристик ( $M[A_2]$  и  $\sigma_2$ ) для различных моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера нормированные значения истинных полезностей первой и третьей альтернативы принимались равными единице и нулю соответственно, а значение истинной полезности второй альтернативы  $w_2$  варьировались из списка:

$$(0.042; 0.25; 0.389; 0.444; 0.57; 0.833; 0.917). \quad (4.2)$$

При этом значение среднеквадратичного отклонения экспертной оценки  $s$  для полезностей альтернатив задавалось из перечня:

$$(1/2; 5/12; 1/3; 11/36; 10/36; 1/4; 5/24; 1/6) . \quad (4.3)$$

Напомним, что параметр  $s$  характеризует степень разброса экспертных мнений в профиле ранжирований.

В приложении 2 приведены численные значения и графические зависимости рассчитанных вероятностных характеристик  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  для исследованных процедур выбора при различных значениях параметра  $s$ .

На рис. 4.4 для исследуемых процедур представлены графики зависимости  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от параметра  $s$  при значениях  $w_2$ , равных 0.042 и 0.444.

В ходе эксперимента нами проводилось сравнение исследуемых процедур по показателю  $\varepsilon$ , характеризующему величину среднего отклонения  $M[A_2]$  от истинного значения  $w_2$  при  $h$  различных значений параметра  $s$  из списка (4.3).

При каждом задаваемом из перечня (4.1)  $t$ -ом значении истинной полезности  $w_2^t$  для  $k$ -ой оцениваемой процедуры ( $k = \overline{1, L}$ ) величина  $\varepsilon_{t,k}$  рассчитывается как

$$\varepsilon_{t,k} = \left( \sum_{i=1}^h \left| (M[A_2])_i - w_2^t \right| \right) / h,$$

где  $(M[A_2])_i$  – значение математического ожидания оценки полезности средней альтернативы, вычисленное при  $i$ -ом значении параметра  $s$ .

Сравнение процедур по показателю среднего отклонения  $M[A_2]$  будем проводить по нормированным значениям  $\varepsilon^H$ :

$$\varepsilon_{t,k}^H = \left( \varepsilon_{t,k} / \sum_{j=1}^L \varepsilon_{t,j} \right) \cdot 100\% .$$

В табл. 4.5. приведены значения величины  $\varepsilon^H$  для исследуемых моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера при различных значениях истинной полезности  $w_2$ . Откуда видно, что в подавляющем большинстве случаев, при анализе по вероятностной характеристике величина

смещения  $M[A_2]$  относительно  $w_2$ , адаптивная процедура МЭЭО показывает результаты, наиболее близкие к эталонным. На рис. 4.5 для процедур, показывающих наилучшие результаты по характеристике  $\varepsilon^H$ , представлены графики зависимости  $M[A_2]$  от  $s$  при  $w_2$ , равных 0.042, 0.389, 0.444, 0.833.

При анализе рассчитанных вероятностных характеристик были сделаны следующие выводы.

1. В общем случае, независимо от заданного значения истинной ценности  $w_2$ , для адаптивной процедуры Терстоуна-Мостеллера характерно наименьшее смещение математического ожидания  $M[A_2]$  при уменьшении величины  $s$  по сравнению с остальными исследуемыми процедурами.

2. В общем случае, при больших значениях параметра  $s$  (0.4 – 0.5) для всех истинных полезностей из перечня (4.2) при сравнении исследуемых процедур выбора по вероятностной характеристике  $\sigma_2$  ничего нельзя сказать о существенном преимуществе какой-либо одной из процедур над остальными. Однако, при малых значениях  $s$  (меньше 0.3 – 0.4) стабильно хороший результат практически при любом значении истинной полезности  $w_2$  показывают адаптивная процедура Терстоуна-Мостеллера и нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера на РК-шкале. В то время как качество остальных исследуемых процедур существенно зависит от конкретных значений истинной полезности  $w_2$ : при одних значениях  $w_2$  эти процедуры находятся среди лучших по вероятностной характеристике  $\sigma_2$ , при других – среди худших.

Таким образом, вероятностный анализ различных моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера показал, что в общем случае в качестве механизма коллективного выбора предпочтительнее использовать адаптивную процедуру Терстоуна-Мостеллера, так как данная процедура показывает наилучшие результаты по рассмотренным статистическим параметрам.

Таблица 4.5.

Результаты вычислительных экспериментов.

№ п/п	Модель выбора на основе процедуры Терстоуна- Мостеллера		$\varepsilon^H, \%$						
	Тип МНК	Тип шкалы	$w_2 =$ 0.042	$w_2 =$ 0.25	$w_2 =$ 0.389	$w_2 =$ 0.444	$w_2 =$ 0.57	$w_2 =$ 0.833	$w_2 =$ 0.917
1	линеари- зованный	рк-шкала	15.5	22.1	20.3	19.4	19.6	18.5	16.0
2	линеари- зованный	комбини- рованная	13.8	19.1	17.2	16.3	16.6	16.2	14.2
3	<i>традиционная</i>		27.8	31.3	25.6	23.9	24.3	28.7	27.4
	линеари- зованный	порядко- вая							
4	взвешен- ный	рк-шкала	9.8	2.85	9.71	11.1	10.8	6.17	8.8
5	взвешен- ный	комбини- рованная	10.4	<b>1.69</b>	7.04	8.43	8.15	6.49	9.37
6	нелиней- ный	рк-шкала	6.98	5.04	3.24	3.58	3.38	6.62	7.48
7	<i>адаптивная</i>		<b>5.5</b>	2.35	<b>2.29</b>	<b>3.28</b>	<b>2.43</b>	<b>4.57</b>	<b>5.88</b>
	нелиней- ный	комбини- рованная							
8	нелиней- ный	порядко- вая	10.3	15.6	14.7	14.0	14.8	12.9	10.8

**Примечание.** В таблице 4.5 (и далее в таблице 4.6) в каждом из столбцов с соответствующим значением истинной полезности  $w_2^t$  жирным шрифтом выделено значение  $\varepsilon_{t,k}^H$  для процедуры с наилучшим показателем по характеристике среднего отклонения  $M[A_2]$ .

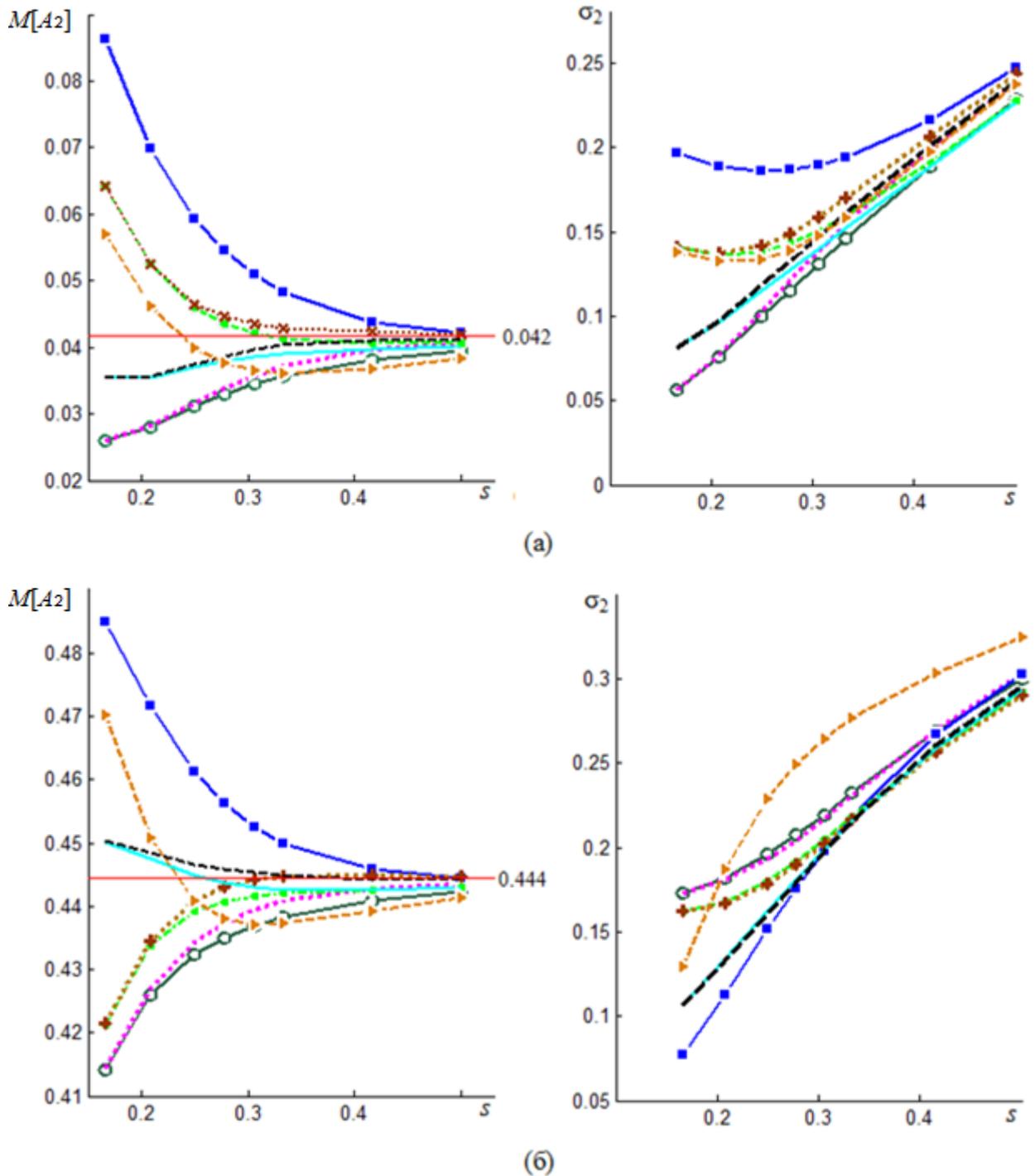


Рис. 4.4. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при а)  $w_2 = 0.042$ , б)  $w_2 = 0.444$ , для моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера: —○— линеаризованная на РК-шкале; ..... линеаризованная на комбинированной шкале; —■— традиционная процедура; - - - взвешенная на РК-шкале; ..... взвешенная на комбинированной шкале; — нелинейная на РК-шкале; - - - адаптивная процедура; - - - нелинейная на порядковой шкале

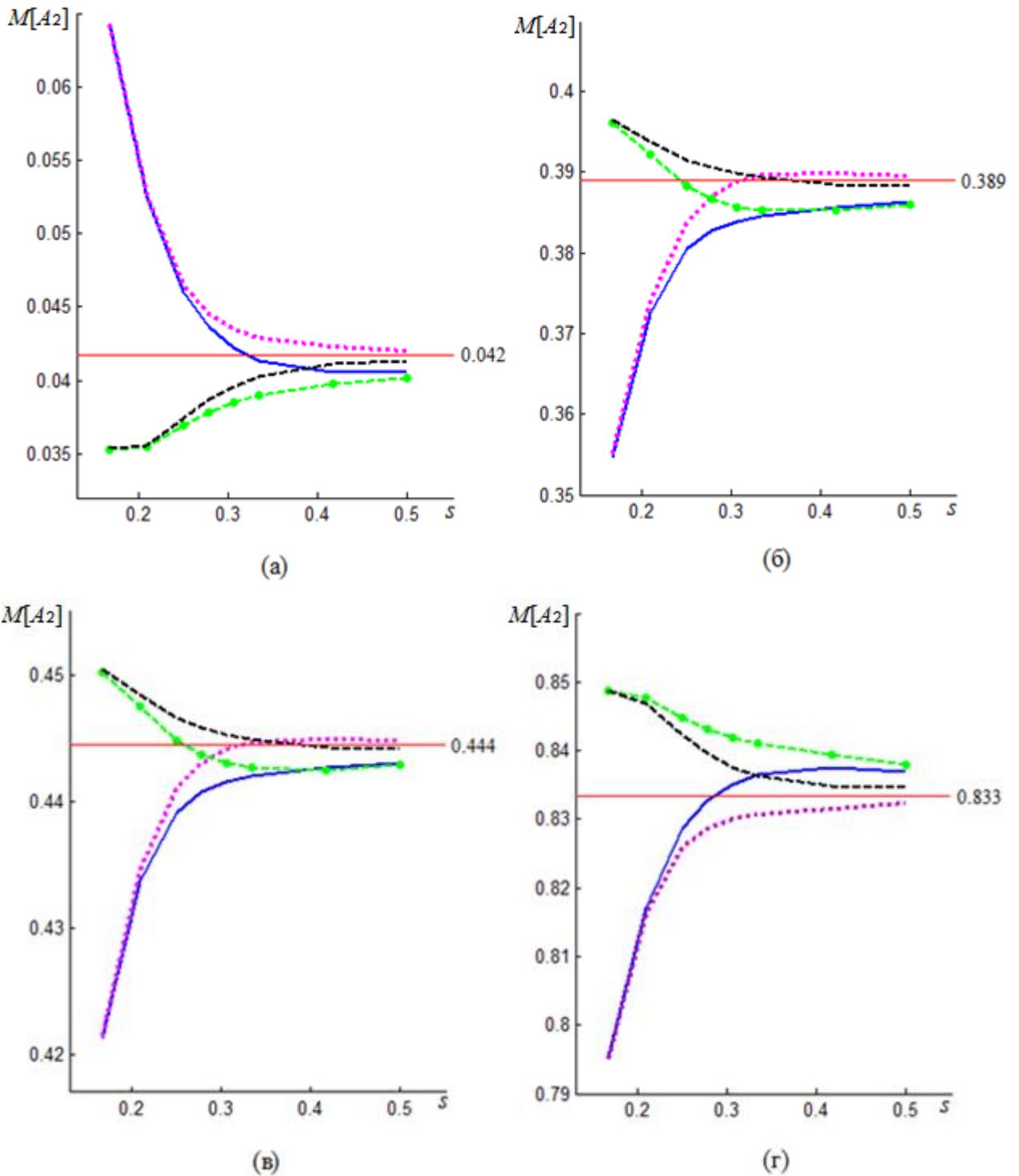


Рис. 4.5. Зависимость  $M[A_2]$  от  $s$  при а)  $w_2 = 0.042$ , б)  $w_2 = 0.389$ , в)  $w_2 = 0.444$ , г)  $w_2 = 0.833$  для моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера:

— взвешенная на РК-шкале;    - - - - - нелинейная на РК-шкале;  
 ..... взвешенная на комбинированной шкале;    - - - - - адаптивная процедура

II). Сравнение по вероятностным характеристикам адаптивной процедуры МЭЭО с другими известными на текущий момент процедурами выбора, применимыми в методе экстраполяции экспертных оценок, осуществлялось при следующих входных данных:

- значения  $w_2$  варьировались из списка:

$$(0.08; 0.24; 0.37; 0.48; 0.83; 0.96) . \quad (4.4)$$

- при этом значение параметра  $s$  задавалось из перечня:

$$(1/2; 5/12; 1/3; 1/4; 1/5; 1/6; 1/8; 1/12) . \quad (4.5)$$

В приложении 3 приведены численные значения вероятностных характеристик  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  для рассматриваемых процедур выбора при различных значениях параметра  $s$ .

На рис. 4.6 – 4.7 для исследуемых процедур представлены графики зависимости математического ожидания и среднеквадратичного отклонения оценки полезности второй альтернативы при её истинных значениях, равных 0.08, 0.24, 0.37, 0.83.

При анализе рассчитанных вероятностных характеристик для процедур выбора, использующихся в МЭЭО, были сделаны следующие выводы.

В общем случае, при всех значениях истинной полезности  $w_2$ , задаваемых из списка (4.4), для адаптивной процедуры МЭЭО и процедуры МЭЭО-ММП с ранжированием на РК-шкале характерно значительно меньшее смещение математического ожидания  $M[A_2]$  при уменьшении величины  $s$  по сравнению с остальными исследуемыми процедурами. В свою очередь, в таблице 4.6. для различных  $w_2$  приведены значения величин  $\varepsilon^H$  (среднего отклонения  $M[A_2]$ ) для исследованных процедур выбора. Откуда видно, что в большинстве случаев (для истинных значений  $w_2$ , равных 0.08, 0.24, 0.37) при сравнении по характеристике  $\varepsilon^H$  адаптивная процедура МЭЭО превосходит процедуру МЭЭО-ММП на РК-шкале, и лишь при  $w_2 = 0.48$  – уступает.

## Результаты вычислительных экспериментов.

№ п/п	Процедура коллективного выбора	Тип шкалы оценивания	$\varepsilon^H, \%$					
			$w_2 =$ 0.08	$w_2 =$ 0.24	$w_2 =$ 0.37	$w_2 =$ 0.48	$w_2 =$ 0.83	$w_2 =$ 0.96
1	адаптивная процедура МЭЭО	комбини- рованная	<b>5.8</b>	<b>2.67</b>	<b>2.13</b>	5.24	<b>4.48</b>	<b>8.09</b>
2	Сысоева-Чирко- Десятова	порядковая	20.3	27.1	30.9	26.2	22.9	19.5
3	Борда	порядковая	46.3	41.5	38.8	32.1	42.1	45.3
4	МЭЭО-ММП	рк-шкала	10.1	6.01	2.69	<b>3.14</b>	7.57	9.47
5	МЭЭО-ММП	порядковая	17.5	22.8	25.5	33.4	23	17.7

2. В общем случае, при всех истинных значениях полезности средней альтернативы, кроме 0.48, адаптивная процедура МЭЭО и процедура МЭЭО-ММП с ранжированием на РК-шкале превосходят все остальные исследуемые процедуры по показателю  $\sigma_2$  практически при любой величине параметра  $s$ , задаваемого из списка (4.5).

Таким образом, по результатам вероятностного анализа, можно сделать вывод, что адаптивная процедура МЭЭО (или адаптивная процедура Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО) наряду с процедурой МЭЭО-ММП на РК-шкале значительно превосходят остальные процедуры по рассмотренным статистическим параметрам ( $M[A_2]$  и  $\sigma_2$ ). Однако, на наш взгляд, в методе экстраполяции экспертных оценок предпочтительнее использовать именно адаптивную процедуру МЭЭО, ввиду того, что она существенно проще в вычислительном аспекте (см. п. 1.4) и, в общем случае, имеет преимущество над МЭЭО-ММП при ранжировании на РК-шкале по вероятностной характеристике величина смещения  $M[A_2]$ .

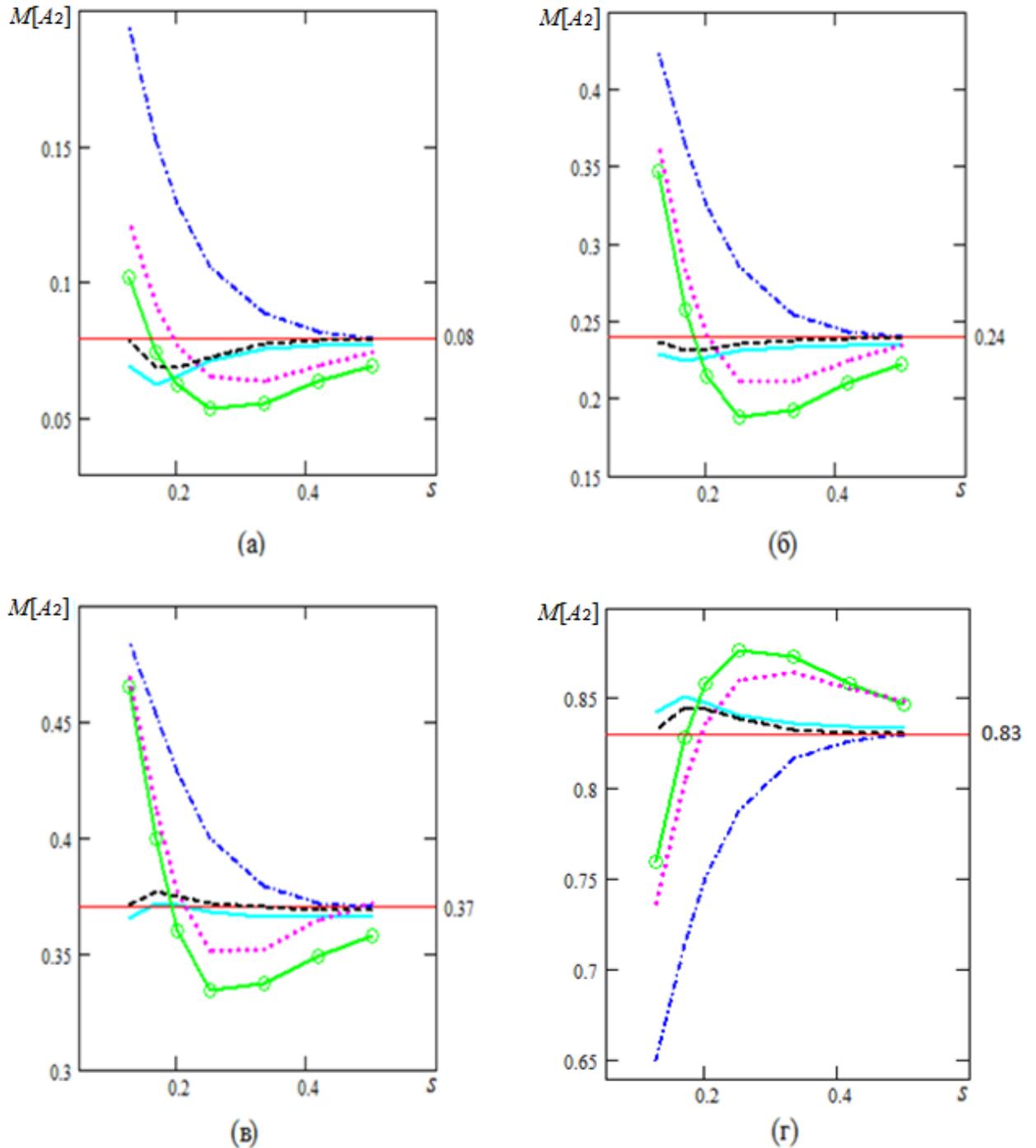


Рис. 4.6. Зависимость  $M[A_2]$  от  $s$  при а)  $w_2 = 0.08$ , б)  $w_2 = 0.24$ , в)  $w_2 = 0.37$ , г)  $w_2 = 0.83$  для процедур:  $\text{---}\text{---}\text{---}$  Борда;  $\text{---}\text{---}\text{---}$  МЭЭО-ММП на порядковой шкале;  $\text{---}\text{---}\text{---}$  МЭЭО-ММП на РК-шкале;  $\text{---}\text{---}\text{---}$  Сысоева-Чирко-Десятова;  $\text{---}\text{---}\text{---}$  адаптивная процедура МЭЭО (адаптивная процедура Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО)

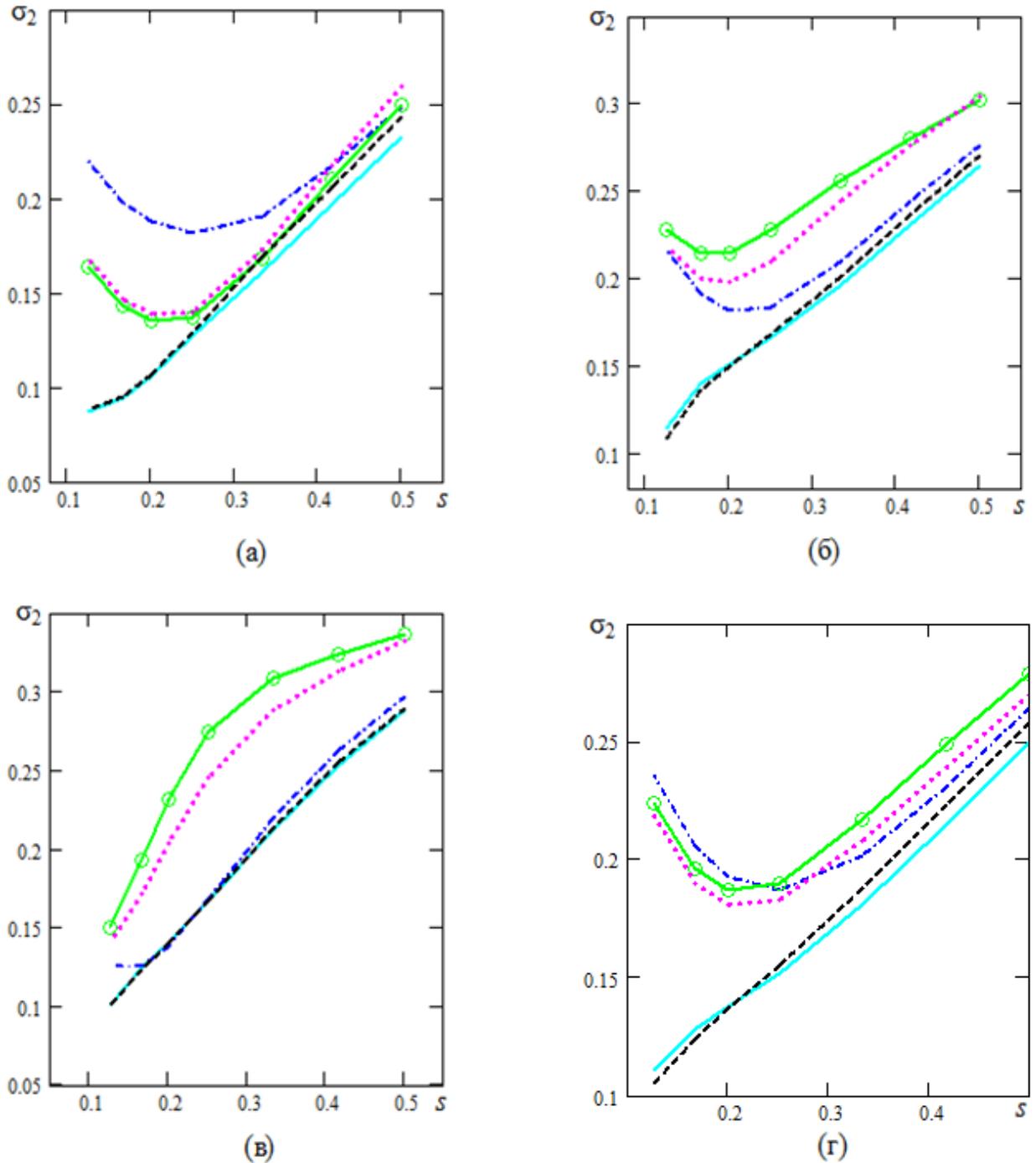


Рис. 4.7. Зависимость  $\sigma_2$  от  $s$  при а)  $w_2 = 0.08$ , б)  $w_2 = 0.24$ , в)  $w_2 = 0.37$ , г)  $w_2 = 0.83$  для процедур:  $\text{---}\cdot\text{---}$  Борда;  $\text{---}\cdot\text{---}$  МЭЭО-ММП на порядковой шкале;  $\text{---}$  МЭЭО-ММП на РК-шкале;  $\text{---}\circ\text{---}$  Сысоева-Чирко-Десятова;  $\text{---}\text{---}$  адаптивная процедура МЭЭО (адаптивная процедура Терстоуна-Мостеллера на основе МЭЭО)

Как уже было отмечено в первой главе (см. п. 1.4), число возможных профилей экспертных упорядочений выборки из  $m$  альтернатив чрезмерно быстро растёт с возрастанием  $m$ . Это, в свою очередь, порождает вычислительные и временные сложности при расчёте вероятностных характеристик. Ввиду чего предыдущие исследования по вероятностному методу анализа проводились при числе альтернатив равном трём ( $m = 3$ ).

Однако в настоящей работе нами был осуществлён вероятностный анализ процедур коллективного выбора, использующих ранжирование на порядковой шкале, для случая пяти экспертов и четырёх альтернатив ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ) с известными истинными полезностями ( $w_1, w_2, w_3, w_4$ ).

Исследования проводились для следующих процедур, пригодных для использования в МЭЭО:

- 1) традиционная процедура Терстоуна-Мостеллера;
- 2) взвешенная процедура Терстоуна-Мостеллера;
- 3) нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера;
- 4) процедура Борда;
- 5) процедура Сысоева-Чирко-Десятова.

Оценка процедур осуществлялась по вероятностным характеристикам:

- величина смещения математического ожидания оценок полезности альтернатив  $A_2$  и  $A_3$  от истинных значений  $w_2$  и  $w_3$  соответственно;
- среднеквадратичное отклонение оценок полезности альтернатив  $A_2$  и  $A_3$  от истинных значений  $w_2$  и  $w_3$  соответственно.

При упорядочении выборки из четырёх альтернатив на порядковой шкале экспертного оценивания возможны двадцать четыре ( $4!$ ) различных варианта. Полный перечень этих упорядочений с соответствующими структурными матрицами  $C^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, 24}$  приведён в приложении 4.

При  $m = 4$  и  $N = 5$  число различных профилей индивидуальных упорядочений на порядковой шкале равно 98280.

Вероятность каждого профиля определялась согласно формуле (1.13).

В рамках вычислительного эксперимента по расчёту вероятностных характеристик  $(M[A_2]; M[A_3])$  и  $(\sigma_2; \sigma_3)$  для исследуемых процедур нормированные значения истинных полезностей первой и четвёртой альтернатив выборки принимались равными 1 и 0 соответственно, а значения истинных полезностей альтернатив  $w_2$  и  $w_3$  варьировались из списка:

$$(0.111; 0.222; 0.333; 0.444; 0.556; 0.667; 0.778; 0.889). \quad (4.6)$$

Значения среднеквадратичного отклонения экспертной оценки  $s$  для полезностей альтернатив задавалось из списка:

$$(1/2; 5/12; 11/36; 10/36; 1/4; 5/24; 1/6). \quad (4.7)$$

На рис. 4.8 – 4.9 для исследуемых процедур выбора представлены графики зависимости математического ожидания и среднеквадратичного отклонения оценок полезностей второй и третьей альтернатив при истинных значениях  $(w_2 = 0.222; w_3 = 0.111)$  и  $(w_2 = 0.889; w_3 = 0.444)$ .

Проведённый вероятностный анализ для случая ранжирования выборки из четырёх альтернатив на порядковой шкале показал, что нелинейная и взвешенная процедуры Терстоуна-Мостеллера имеют превосходство по вероятностным характеристикам  $(M[A_2]; M[A_3])$  и  $(\sigma_2; \sigma_3)$  над всеми остальными процедурами. Однако нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера имеет преимущество над взвешенной процедурой Терстоуна-Мостеллера при малых значениях параметра  $s$  из списка (4.7), и наоборот, уступает – при больших значениях  $s$ . Численный пример, демонстрирующий эффективность применения механизма выбора на основе нелинейной процедуры Терстоуна-Мостеллера, приведён в приложении 5.

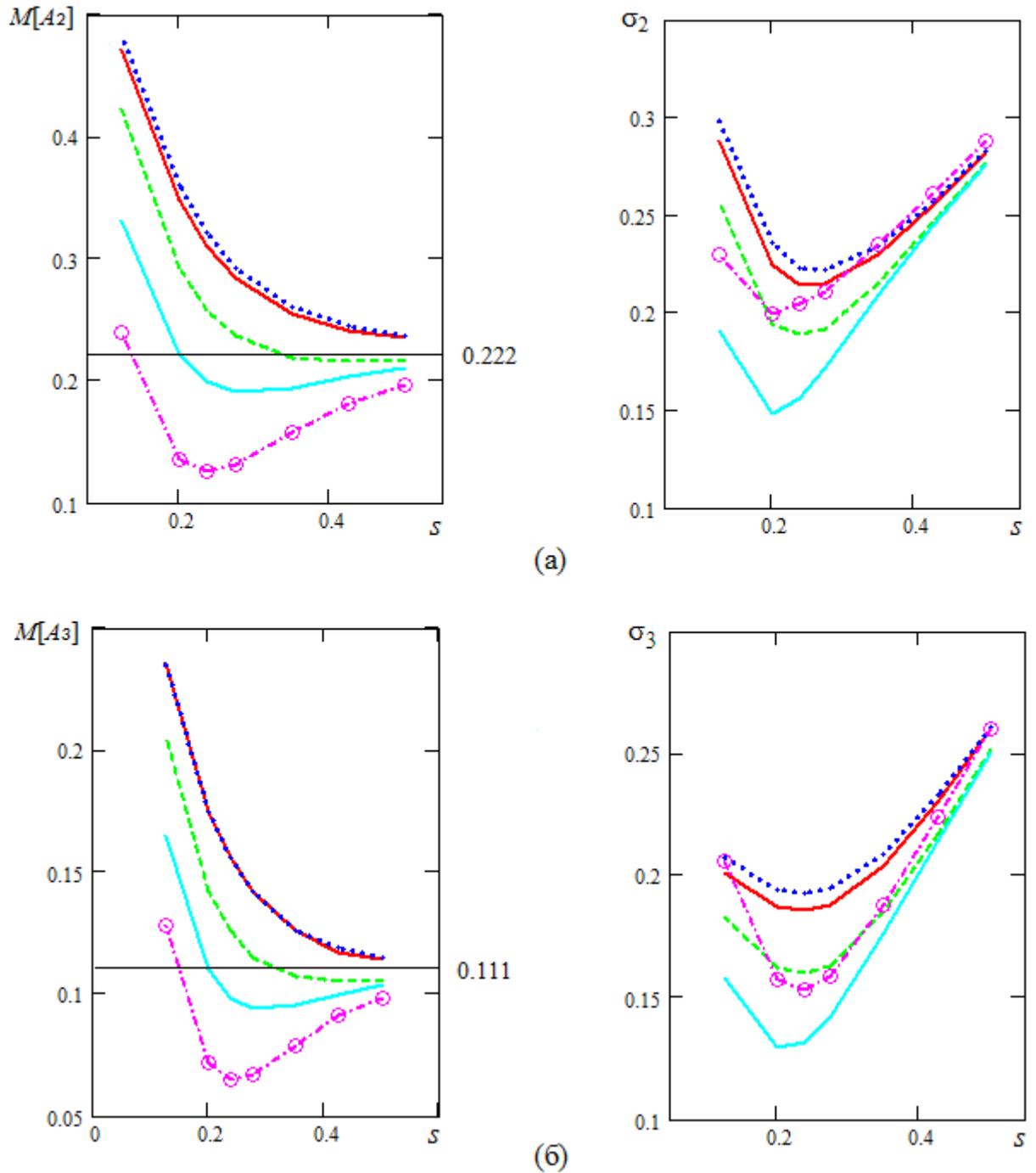
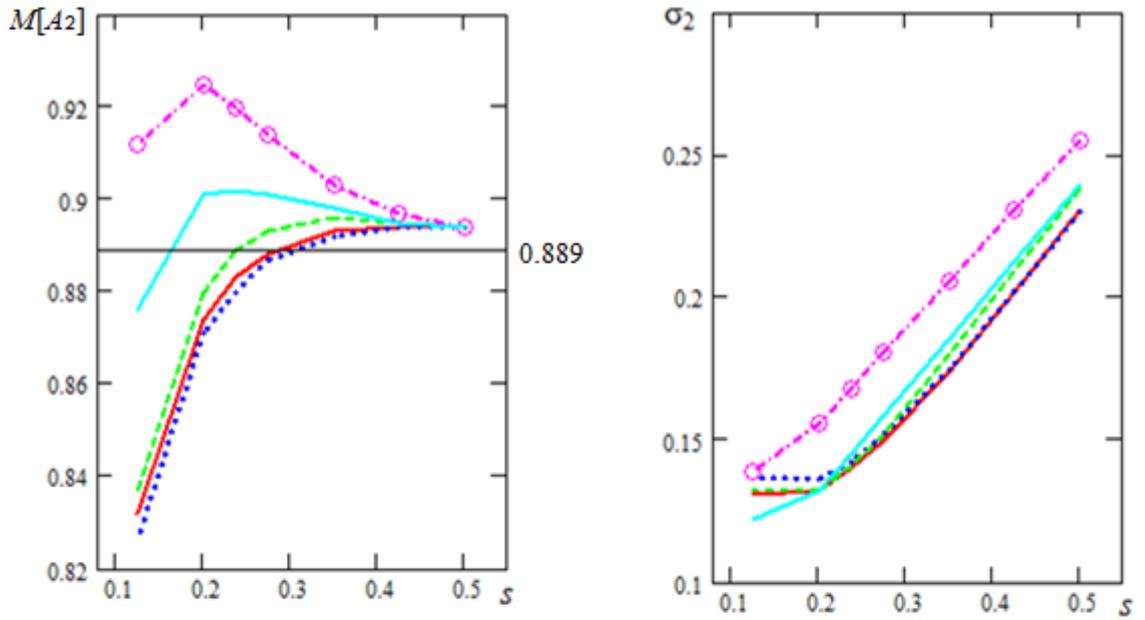
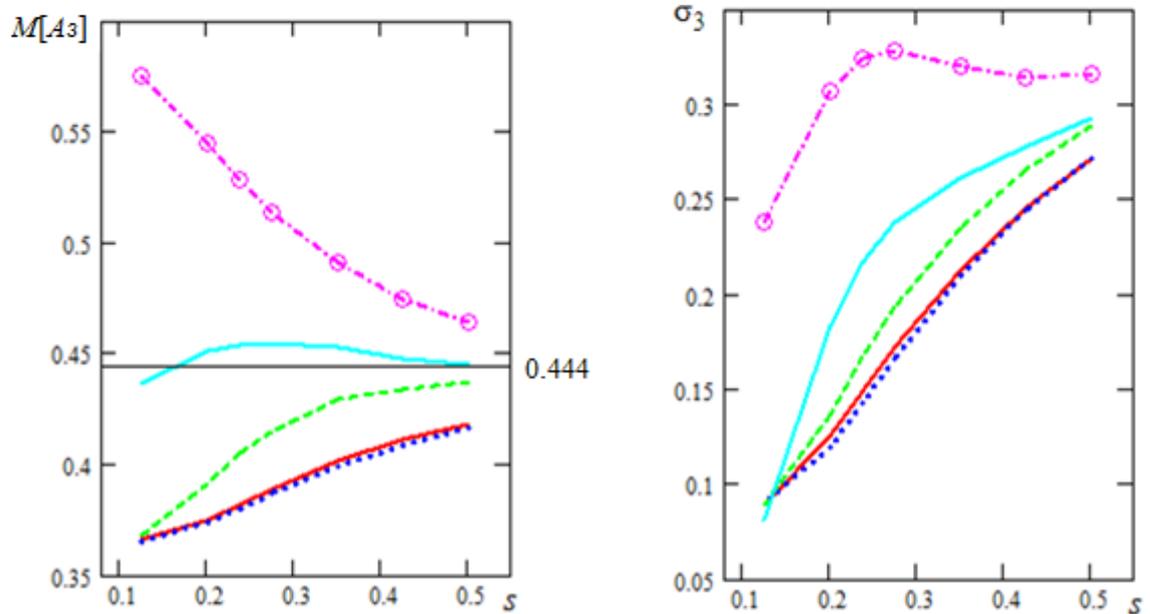


Рис. 4.8. Зависимость ( $M[A_2]$  и  $\sigma_2$ ) от  $s$  при а)  $w_2 = 0.222$ , ( $M[A_3]$  и  $\sigma_3$ ) от  $s$  при б)  $w_3 = 0.111$  для процедур коллективного выбора:

- Борда;
- традиционная процедура Терстоуна-Мостеллера;
- - - взвешенная процедура Терстоуна-Мостеллера на порядковой шкале;
- ⊗-⊗ Сысоева-Чирко-Десятова;
- нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера на порядковой шкале



(a)



(б)

Рис. 4.9. Зависимость ( $M[A_2]$  и  $\sigma_2$ ) от  $s$  при а)  $w_2 = 0.889$ , ( $M[A_3]$  и  $\sigma_3$ ) от  $s$  при б)  $w_3 = 0.444$  для процедур коллективного выбора:

- Борда;
- традиционная процедура Терстоуна-Мостеллера;
- - - взвешенная процедура Терстоуна-Мостеллера на порядковой шкале;
- - - ○ - - - Сысоева-Чирко-Десятова;
- нелинейная процедура Терстоуна-Мостеллера на порядковой шкале

### 4.3. Выводы по главе

1. Разработан комплекс программного обеспечения в виде автоматизированной системы поддержки принятия решений на основе адаптивной процедуры МЭЭО. Программный комплекс обеспечивает возможность быстрой настройки на решение сложных многокритериальных задач выбора в конкретной предметной области.

2. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие возможность применения синтезированных в настоящей работе модели и алгоритма адаптивной процедуры коллективного выбора на основе МЭЭО для решения многокритериальной задачи выбора наилучшей структуры линии фотолитографии с реальными исходными данными.

3. Проведено сравнение на основе вероятностного метода анализа адаптивной процедуры МЭЭО с другими известными на данный момент процедурами экстраполяции экспертных оценок. Результаты анализа показали, что адаптивная процедура выбора на основе МЭЭО, наряду с процедурой МЭЭО-ММП с ранжированием на разностно-классификационной шкале, по исследуемым вероятностным характеристикам превосходят остальные и показывают примерно одинаковые результаты. Однако существенным преимуществом адаптивной процедуры МЭЭО является то, что она значительно проще с вычислительной точки зрения по сравнению с МЭЭО-ММП.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении диссертационного исследования получены следующие основные научные и практические результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия существования конечных решений при заданном профиле предпочтений в процедурах коллективного выбора МЭЭО-ММП и Терстоуна-Мостеллера.

2. Предложен метод анализа профиля предпочтений на порядковой шкале на устойчивость решений, основанный на проверке связности графа экспертного упорядочения. Этот результат вместе с результатом предыдущего пункта позволяет разработать процедуру коллективного выбора на основе МЭЭО, адаптивную к структуре профиля предпочтений.

3. Разработана модель и на её основе алгоритм модифицированной процедуры Терстоуна-Мостеллера для коллективного выбора при экспертизе на РК-шкале, которая даёт возможность значительно повысить точность результатов экстраполяции по сравнению с порядковой шкалой.

4. Доказана состоятельность решений, получаемых модифицированной процедурой Терстоуна-Мостеллера, что подтверждает тенденцию улучшения точности данной процедуры при увеличении числа экспертов.

5. Определены условия применимости разностно-классификационной шкалы экспертного оценивания в процедурах экстраполяции экспертных оценок, что позволило синтезировать адаптивную процедуру выбора на основе МЭЭО, обеспечивающую возможность применения варианта метода коллективного выбора, наиболее целесообразного для конкретного профиля упорядочений.

6. Разработан комбинированный алгоритм коллективного выбора на основе модели Терстоуна-Мостеллера для МЭЭО, адаптивный к: а) типу шкалы экспертного оценивания (порядковая и/или разностно-классификационная); б) структуре профиля предпочтений; в) нетранзитивным и заведомо несуще-

ствующим (относительно оценок альтернатив по частным критериям качества) экспертным ранжированиям.

7. Создан программный комплекс, реализующий предложенные модели и методы коллективного выбора на основе МЭЭО, позволяющий осуществить коллективный выбор при решении управленческих задач в различных сферах науки и производства.

8. Проведены вычислительные эксперименты на основе вероятностного метода анализа, подтверждающие эффективность разработанных методов и моделей коллективного выбора.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Айзерман, М. А. Выбор вариантов: основы теории [Текст] / М. А. Айзерман, Ф. Т. Алескеров. – М.: Наука, 1990. – 240с.
2. Айзерман, М. А. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов [Текст] / М. А. Айзерман, А. В. Малишевский // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 2. – С. 65–82.
3. Алескеров, Ф. Т. О степени манипулируемости правил коллективного выбора [Текст] / Ф. Т. Алескеров, Э. Курбанов // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 10. – С. 134–146.
4. Андерсон, Т. Введение в многомерный статистический анализ; пер. с англ. / Т. Андерсон. – М. : Физматгиз, 1963. – 500 с.
5. Батищев, Д. И. Многокритериальный выбор с учетом индивидуальных предпочтений / Д. И. Батищев, Д. Е. Шапошников. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 1994. – 92 с.
6. Белов, Ю. А. Декомпозиция задачи выбора [Текст] / Ю. А. Белов, С. В. Шафранский // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. – 1990. – № 2. – С. 173–177.
7. Березовский, Б. А. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации [Текст] / Б. А. Березовский, В. И. Борзенко, Л. М. Кемпнер. – М.: Наука, 1981. – 150 с.
8. Березовский, Б. А. Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты [Текст] / Б. А. Березовский, Ю. М. Барышников, В. И. Борзенко, Л. М. Кемпнер. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
9. Берж, К. Теория графов и ее применение [Текст] / К. Берж / Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 264 с.
10. Борисов, В. И. Проблемы векторной оптимизации [Текст] / В. И. Борисов // Иссл. операций: методологические аспекты. – М.: Наука, 1972. – С. 12 – 34.
11. Бугаев, Ю. В. Вероятностный метод анализа процедур построения

коллективных экспертных оценок [Текст] / Ю. В. Бугаев, Б. Е. Никитин, М. С. Миронова // Вестник ВГУ. Серия «Системный анализ и информационные технологии». – 2011. – №2. – С. 130 – 135.

12. Бугаев, Ю. В. Вычислительные задачи синтеза модели выбора методом максимального правдоподобия [Текст] / Ю. В. Бугаев, Б. Е. Никитин, А. С. Чайковский // Вестник Воронеж. гос. техн. ун-та. 2010. Т.6. № 2. С. 71 – 74.

13. Бугаев, Ю. В. Приближенный метод синтеза моделей выбора на основе экстраполяции экспертных оценок [Текст] / Ю. В. Бугаев, И. Е. Медведкова, Б. Е. Никитин, А. С. Чайковский // Вестник ТГТУ. 2009. – Т.15. – № 4. – С. 766 – 776.

14. Бугаев, Ю. В. Синтез моделей выбора технологических решений на основе двухэтапных мажоритарных схем [Текст]: дис. ... докт. ф.-м. наук: 05.13.18 / Бугаев Юрий Владимирович. – Воронеж. – 2005. – 332 с.

15. Бугаев, Ю. В. Система поддержки принятия решений на основе экстраполяции экспертных оценок методом максимального правдоподобия [Текст] / Ю. В. Бугаев, М. С. Миронова, Б. Е. Никитин, А. С. Чайковский // Вестник Брянск. гос. техн. ун-та. – 2010. – № 1. – С. 84–90.

16. Бугаев, Ю. В. Экстраполяция экспертных оценок в оптимизации технологических систем [Текст] / Ю. В. Бугаев // Изв. АН. Сер. Теория и системы управления. – 2003. – № 3. – С. 90 – 96.

17. Бугаев, Ю. В. Вопросы существования и единственности в методе максимума правдоподобия при экстраполяции экспертных оценок [Текст] / Ю. В. Бугаев // Теория конфликта и ее приложения. I Всерос. науч.-техн. конф. Воронеж: ВГТА, 2000. – С. 63 – 64.

18. Бугаев, Ю. В. Об одном методе отбора эффективных решений на итерациях поиска [Текст] // Математич. моделирование информационных и технологич. систем: межвуз. сб. науч. тр. Воронеж: ВГТА, 2000. – Вып. 4. – С. 211 –215.

19. Вентцель, Е. С. Исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель. – М.: Сов. радио, 1972. – 551с.
20. Вольский, В. И. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа [Текст] / В. И. Вольский, З. М. Лезина. – М.: Наука, 1991. – 192 с.
21. Вольский, В. И. Правила выбора лучших вариантов на ориентированных графах и турнирах [Текст] / В. И. Вольский // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 3. – С. 3–17.
22. Вольский, В. И. Сравнительный анализ процедур голосования [Текст] / В. И. Вольский, З. М. Лезина // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 2. – С. 3–29.
23. Галиев, Ш. И. Направление убывания для минимаксных задач [Текст] / Ш. И. Галиев // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1993. – Т. 33. – № 1. – С. 32 – 35.
24. Гермейер, Ю. Б. Игры с противоположными интересами [Текст] / Ю. Б. Гермейер. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
25. Гермейер, Ю. Б. Методологические и математические основы исследования операций и теории игр [Текст] / Ю. Б. Гермейер. – М.: ВЦ МГУ, 1967. – 212 с.
26. Глотов, В. А. Координатно-модульные отношения [Текст] / В. А. Глотов // Авт. и телемех. – 1984. – № 2. – С. 99 – 104.
27. Демиденко, Е. З. Линейная и нелинейная регрессии [Текст] / Е. З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
28. Десятов, Д. Б. Метод экстраполяции экспертных оценок качества на основе принципа максимального правдоподобия [Текст] / Д. Б. Десятов, В. В. Сысоев, М. С. Чирко // Надежность и контроль качества. – 1984. – № 12. – С. 12–15.
29. Десятов, Д. Б. Принятие решений на основе экспертных оценок с использованием метода максимального правдоподобия [Текст] / Д. Б. Деся-

тов, В. В. Сысоев, М. С. Чирко // Автоматизация проектирования производственных систем. – Воронеж : ВПИ, 1984. – С. 32–36.

30. Дэвид, Г. Метод парных сравнений [Текст] / Г. Дэвид.; пер. с англ. Н. Космарской и Д. Шмерлинга; под. ред. Ю. Адлера. – М.: Статистика, 1978. – 144 с.

31. Емельянов, С. В. Многокритериальные методы принятия решений [Текст] / С. В. Емельянов, О. И. Ларичев. – М. : Знание, 1985. – 32 с.

32. Кини, Р. Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения [Текст] / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М.: Радио и связь, 1981. – 560с.

33. Краснощеков, П. С. Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем [Текст] / П. С. Краснощеков, В. В. Морозов, В. В. Федоров // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. – 1978. – № 5. – С. 57–64.

34. Ларичев, О. И. Объективные модели и субъективные решения [Текст] / О. И. Ларичев. – М. : Наука, 1987. – 144 с.

35. Ларичев, О. И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах [Текст]: учеб. / О. И. Ларичев. – М.: Логос, 2000. – 296 с.

36. Ларичев, О. И. Метод ЗАПРОС (ЗАмкнутые ПРОцедуры у Опорных Ситуаций) анализа вариантов сложных решений [Текст] / О. И. Ларичев, Ю. А. Зуев, Л. С. Гнеденко // Многокритериальный выбор при решении слабоструктуризованных проблем / Под ред. С. В. Емельянова. – М.: ВНИИСИ, 1978. – С. 83 – 95.

37. Лезина, З. М. Процедуры коллективного выбора [Текст] / З. М. Лезина // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 8. – С. 3–35.

38. Липский, В. Комбинаторика для программистов [Текст] / В. Липский. – М.: Мир, 1988. – 213 с.

39. Литвак, Б. Г. Экспертная информация. Методы получения и анали-

за [Текст] / Б. Г. Литвак; ред. В. М. Ларионов; художник В. П. Карпов. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

40. Льюс, Р. Д. Игры и решения [Текст] / Р. Д. Льюс, Х. Райфа / Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1961. – 642 с.

41. Макаров, И. М. Теория выбора и принятия решений [Текст] / И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

42. Миркин, Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. Англ. изд.: Mirkin B.G. Group Choice. – New York: Wiley, 1979.

43. Миронова, М. С. Моделирование процедур коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок [Текст] / дис.... канд. ф.-м. наук: 05.13.18 / Миронова Мария Сергеевна. – Воронеж. – 2011. – 142 с.

44. Никитин, Б. Е. К вопросу о выявлении предпочтений ЛПР на лингвистической шкале [Текст] / Б. Е. Никитин, Ю. В. Бугаев // Теория конфликта и ее приложения: материалы Всерос. науч.-техн. конф. / Воронеж. гос. технол. акад. – Воронеж, 2000. – С. 23–24.

45. Ногин, В. Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето [Текст] / В. Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42. – №7. – С. 950 – 956.

46. Ногин, В. Д. Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения [Текст] / В. Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – №11. – С. 1676 – 1686.

47. Ногин, В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев [Текст] / В. Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – №7. – С. 1259 – 1268.

48. Ногин, В. Д. Использование набора количественной информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений [Текст]

/ В. Д. Ногин, И. В. Толстых // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40. №11. С. 1593 – 1601.

49. Ногин, В. Д. Принцип Эджворта-Парето в терминах нечеткой функции выбора [Текст] / В. Д. Ногин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46. – №4. – С. 582 – 591.

50. Ногин, В. Д. Принятие решений при многих критериях [Текст] / В. Д. Ногин. – СПб: Изд-во Ютас, 2007. – 104 с.

51. Ногин, В.Д. Эволюция принципа Эджворта-Парето [Текст] / В.Д. Ногин, Н.А. Волкова // Таврический вестник информатики и математики. – 2006. – №1. – С. 21 – 33.

52. Ногин, В. Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению [Текст] / В. Д. Ногин // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008. – № 1. – С. 98 – 112.

53. Ногин, В. Д. Аксиоматический подход к сужению множества Парето: вычислительные аспекты [Текст] / В. Д. Ногин // International Journal «Information Theories & Applications». – 2013. – V. 20. – № 4. – P. 352 – 359.

54. Ногин, В. Д. Обобщенный принцип Эджворта-Парето в терминах функций выбора [Текст] / В. Д. Ногин // Методы поддержки принятия решений: Сб. трудов ИСА РАН / под ред. С. В. Емельянова, А. Б. Петровского. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – С. 43 – 53.

55. Ногин, В.Д. Обобщенный принцип Эджворта-Парето и границы его применимости [Текст] / В. Д. Ногин // Экономика и математические методы. – 2005. – Т.41. – №3. – С.128 – 134.

56. Ногин, В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход [Текст] / В. Д. Ногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005 (2-е изд., испр. и доп.). – 176 с.

57. Нэш, Д. Безкоалиционные игры [Текст] / Д. Нэш // Матричные игры / Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 206 – 221.

58. Петровский, А. Б. Теория принятия решений [Текст] : учеб. для

студ. вузов / А. Б. Петровский. – М.: Академия, 2009. – 400 с.

59. Подиновский, В. В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах [Текст] / В. В. Подиновский // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н. Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979. – С. 117 – 145.

60. Подиновский, В. В. Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений. Порядковые или ординальные коэффициенты важности [Текст] / В. В. Подиновский // Авт. и телемех. – 1978. – № 10. – С. 130 – 141.

61. Подиновский, В. В. Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями [Текст] / В. В. Подиновский // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1975. – Т.15. – № 2. – С. 330 – 394.

62. Подиновский, В. В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями [Текст] / В. В. Подиновский // Авт. и телемех. – 1976. – № 11. – С. 118 – 127.

63. Подиновский, В. В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям [Текст] / В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов. – М.: Сов. радио, 1975. – 192 с.

64. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

65. Пустыльник, Е. И. Использование линейной модели для экстраполяции экспертных оценок [Текст] / Е. И. Пустыльник, В. В. Сысоев, М. С. Чирко // Автоматизация проектирования. – М.: МДНТП. – 1981. – С. 46–50.

66. Пустыльник, Е. И. Об одном методе экстраполяции экспертных оценок [Текст] / Е. И. Пустыльник, В. В. Сысоев, М. С. Чирко // Экономика и математические методы. – 1983. – вып. 4. – С. 716–717.

67. Пшеничный, Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи [Текст] / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

68. Современное состояние теории исследования операций [Текст] /

Под ред. Н. Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979. – 464 с.

69. Сысоев, В. В. Структурные и алгоритмические модели автоматизированного проектирования производства изделий электронной техники [Текст] / В. В. Сысоев. – Воронеж: Воронеж. технол. ин-т, 1993. – 207 с.

70. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – Т.1. – М.: «Наука», 1970. – 608 с.

71. Черняева, С. Н. Синтез моделей индивидуального выбора в условиях избыточности экспертной информации [Текст] / дис. ... канд. ф.-м. наук: 05.13.18 / Черняева Светлана Николаевна. – Воронеж. – 2010. – 141 с.

72. Штойер, Р. Многокритериальная оптимизация: теория, расчет и приложения [Текст] / Р. Штойер / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.

73. Экспертные оценки. Методы и применение [Текст]: обзор / Д. С. Шмерлинг, С. А. Дубровский, Т. Д. Аржанова, А. А. Френкель // Ученые записки по статистике. – 1977. – Т. 29: Статистические методы анализа экспертных оценок. – С. 290–382.

74. Юдин, Д. Б. Вычислительные методы принятия решений [Текст] / Д. Б. Юдин. – М.: Наука, 1989. – 316 с.

75. Юшматов, С. В. Метод нахождения весов, не требующий полной матрицы попарных сравнений [Текст] / С. В. Юшматов // Авт. и телемех., 1990. – № 2. – С. 186 – 189.

76. Arrow, K. J. Social Choice and Multicriterion Decision-Making [Text] / K. J. Arrow, H. Raunaud // Cambridge MIT Press. – 1986.

77. Arrow, K.J. Social Choice and Individual Values [Text] / K.J. Arrow. – New York: Wiley, 1963.

78. Cogger, K. O. Eigenweight vectors and least-distance in pairwise weight ratios [Текст] / К. О. Cogger, P. L. Yu // J. optimiz. theory and appl. 1985. V. 46. P. 483 – 491.

79. Figueira, J. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys

[Текст] / J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott. – Springer, 2005.

80. Geoffrion, A. M. Proper efficiency and the theory of vector maximization [Текст] / A. M. Geoffrion // J. math. anal. and apl. 1968. – V. 22. – № 3. – P. 618 – 630.

81. Lotov, A. V. Interactive decision maps, Approximation and visualization of Pareto frontier [Текст] / A. V. Lotov, V. A. Bushenkov, G. K. Kamenev. – Boston, Kluver, 2004.

82. Miettinen, K. Nonlinear multiobjective optimization [Текст] / K. Miettinen. – Boston, Kluver, 1999.

83. Mosteller, F. The world series competitions [Text] / F. Mosteller // J. Amer. Statist Assoc. – 1952. – V. 47. – P. 355–380.

84. Moulin, H. Fairness and strategies in voting [Text] / H. Moulin // Virginia Polytechnic Institute and State University, Working Paper, – Jan. 1985.

85. Moulin, H. Lecture notes on the theory of voting [Text] / H. Moulin // Econometric Research Program Research Memorandum № 312. – Princeton University, New Jersey, – Febr. 1984.

86. Moulin, H. The strategy of social choice [Text] / H. Moulin – Paris: Laboratoire D'Econometrie, 1981.

87. Noether, G. E. Remarks about a paired comparison model [Text] / G. E. Noether // Psychometrika. – 1960. – V. 25. – P. 357–367.

88. Nurmi, H. Voting Procedures [Text] / H. Nurmi // British Journal of Political Science. – 1983 – V. 13. – №. 2. – P. 159 – 186.

89. Plott, C. B. Path independence, rationality and social choice [Text] / C. B. Plott // Econometrica. – 1973. – V. 41. – No 6. – P. 1075 – 1091.

90. Plott, C. R. Axiomatic social choice theory: an overview and interpretation [Text] / C. R. Plott. – 1976. – V. 20. – P. 511 – 596.

91. Podinovski, V. V. Criteria importance theory [Текст] / V. V. Podinovski // Math. social sciences. – 1994. – V. 27. – P. 237 – 252.

92. Richelson, J. T. Conditions on social choice functions [Text] /

J. T. Richelson // Publ. choice. – 1977. – V. 31. – P. 79 – 110.

93. Richelson, J. T. Majority rule and collective choice [Text] / J. T. Richelson // Washington: American University. – 1981.

94. Richter, M. K. Rational choice [Text] / M. K. Richter, J. S. Chipman, L. Hurwicz, H. F. Sonenschein // Preference, Utility, and Demand. – New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1971.

95. Riker, W. H. Liberalism Against Populism [Text] / W. H. Riker // San Francisco: Freeman and Company. – 1983.

96. Saaty, T. Eigenweigh an logarithmic lease squares [Текст] / T. Saaty // Eur. j. oper. res. – 1990. – V. 48. – № 1. – P.156 – 160.

97. Schwartz, T. No Minimally Reasonable Collective Choice Process Can Be Strategy-Proof [Text] / T. Schwartz // Math. Social Sci. – 1982. – V. 3 – № 1 – P. 52–72.

98. Schwartz, T. The Logic of Collective Choice [Text] / T. Schwartz // New York: Columbia University Press. – 1986.

99. Sen, A. K. Collective Choice and Social Welfare [Text] / A. K. Sen. – San Francisco: Holden-Day, 1970.

100. Suzumura, K. Rational choice and revealed preference [Text] / K. Suzumura // Rev. Econ. Stud. – 1976. – V. 43. – No. 1. – P. 149–158.

101. Thurstone, L. L. A law of comparative judgment [Text] / L. L. Thurstone. // Psychol. Rev. – 1927. – V. 34. – P. 273 – 286.

102. Thurstone, L. L. The measurement of values [Text] / L. L. Thurstone. – Chicago: Univ. Press, 1959.

103. Wei, T. H. The algebraic foundations of ranking theory [Текст] / T. H. Wei // Thes. Cambridge. – 1952. – P. 15 – 17.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОНЕЧНОГО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ СО  
СПЕЦИАЛЬНЫМ ПРОГРАММНЫМ ОБЕСПЕЧЕНИЕМ

**Этап №1. «Ввод исходных данных»**

Информационная система предоставляет пользователю возможность задавать исходную матрицу оценок альтернатив по частным критериям качества двумя способами (рис. П1.1):

- ввод численных значений векторных оценок альтернатив обучающей выборки с клавиатуры (рис. П1.2);
- считывание матрицы оценок альтернатив из заранее сгенерированного текстового файла (рис. П1.3).

На этом этапе пользователю доступны функции по изменению заданной матрицы векторных оценок альтернатив.

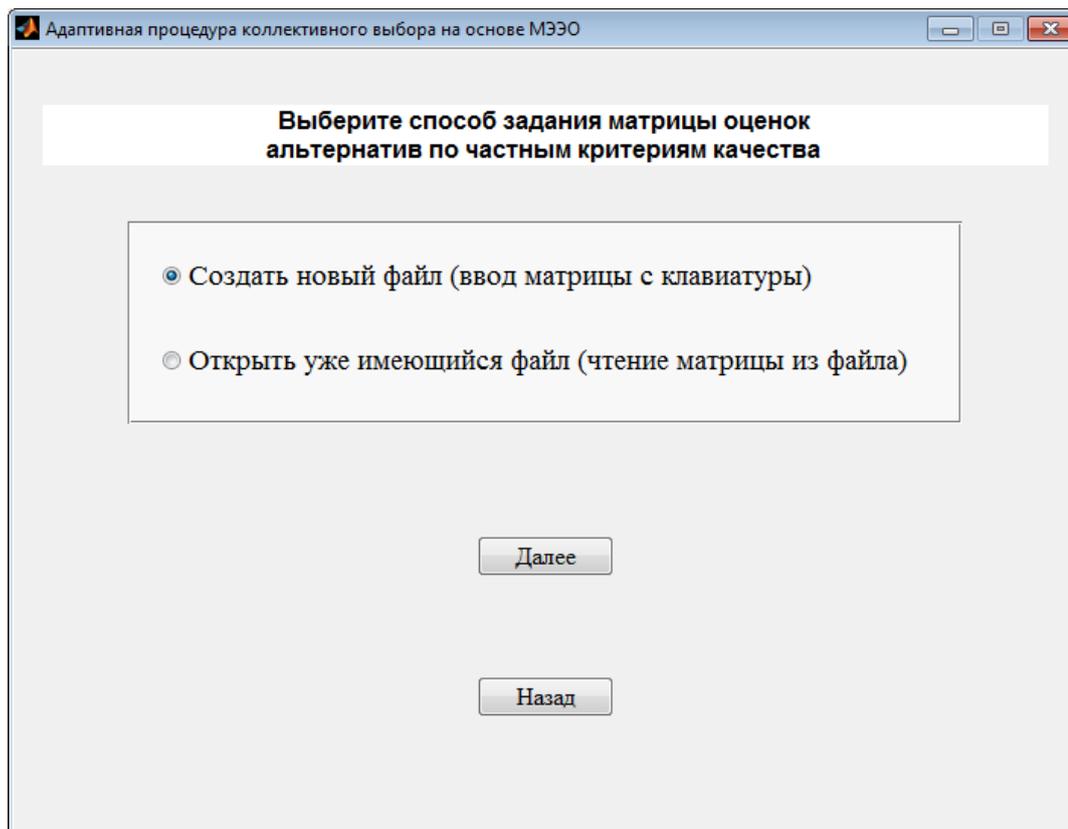
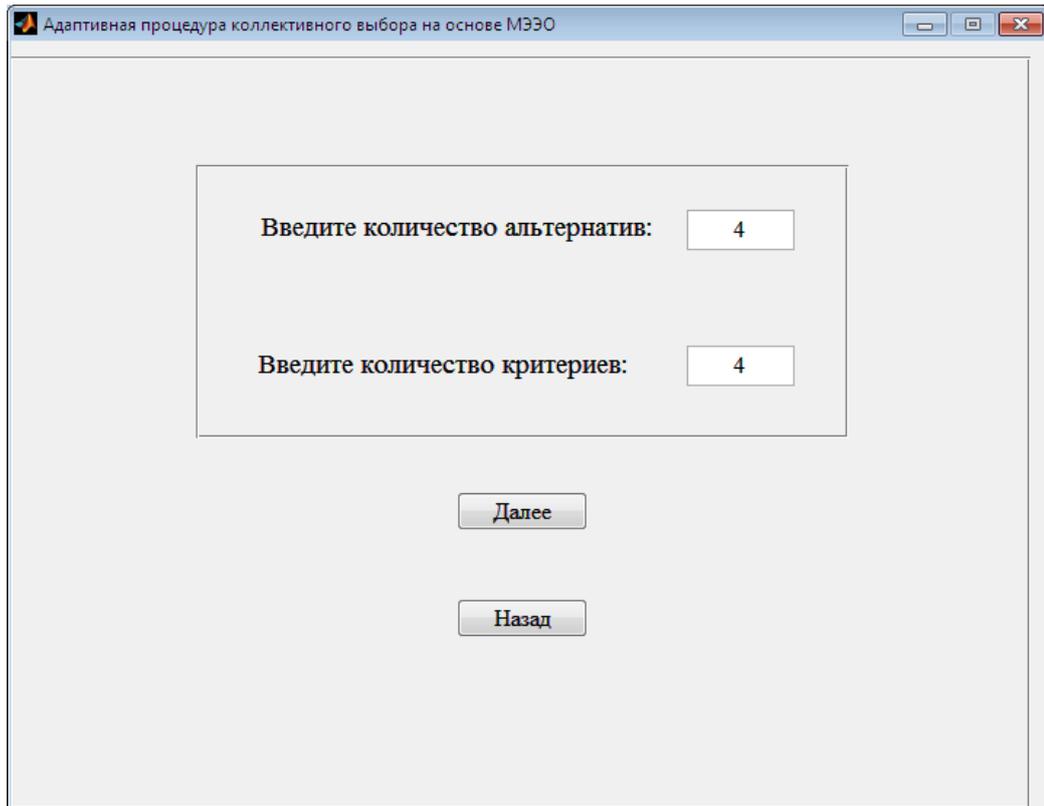


Рис. П1.1. Форма выбора способа задания матрицы  
векторных оценок альтернатив



Адаптивная процедура коллективного выбора на основе МЭЭО

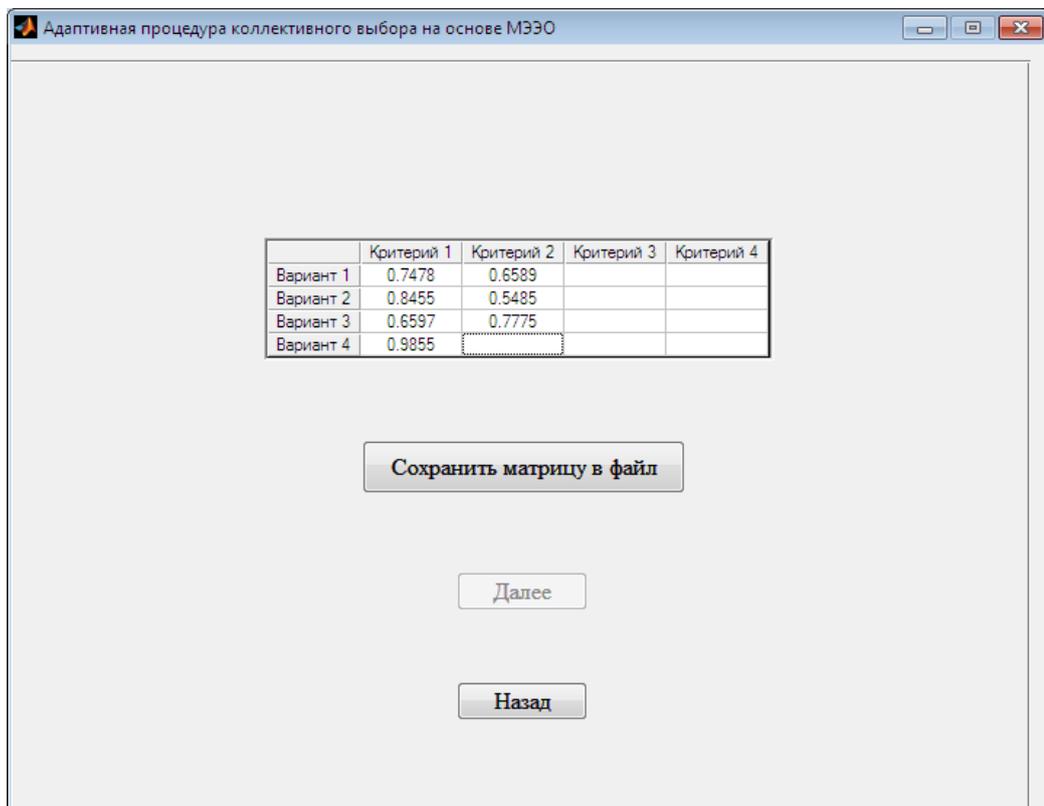
Введите количество альтернатив:

Введите количество критериев:

Далее

Назад

а)



Адаптивная процедура коллективного выбора на основе МЭЭО

	Критерий 1	Критерий 2	Критерий 3	Критерий 4
Вариант 1	0.7478	0.6589		
Вариант 2	0.8455	0.5485		
Вариант 3	0.6597	0.7775		
Вариант 4	0.9855			

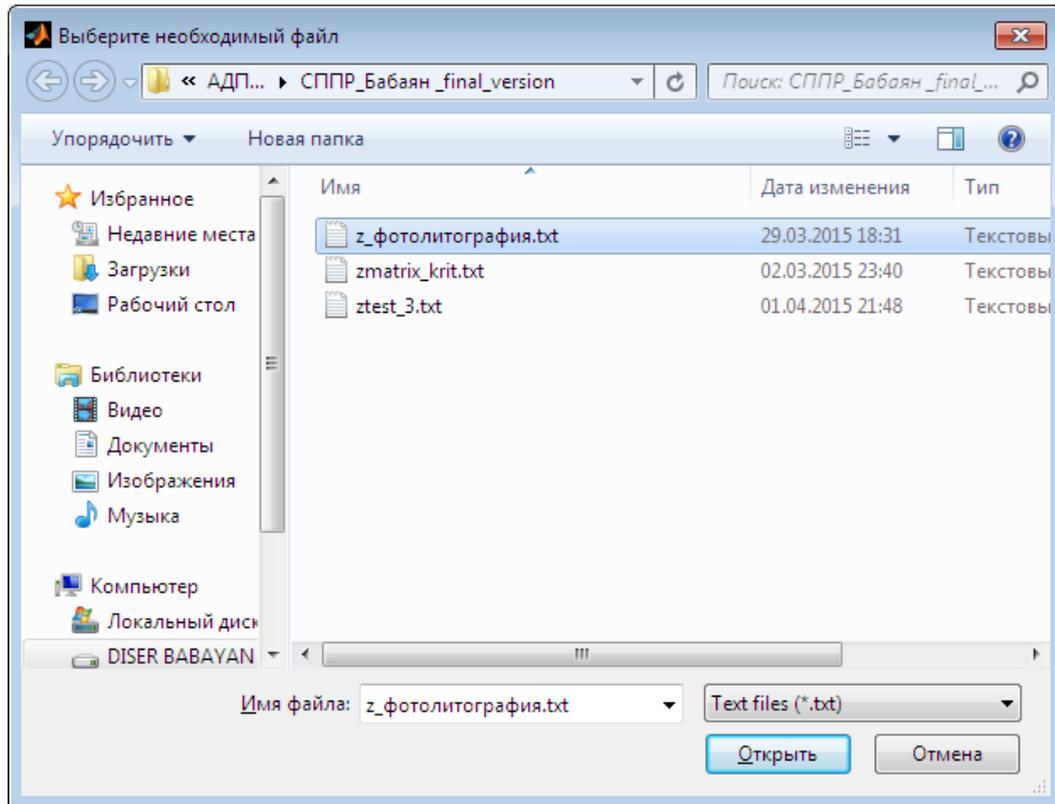
Сохранить матрицу в файл

Далее

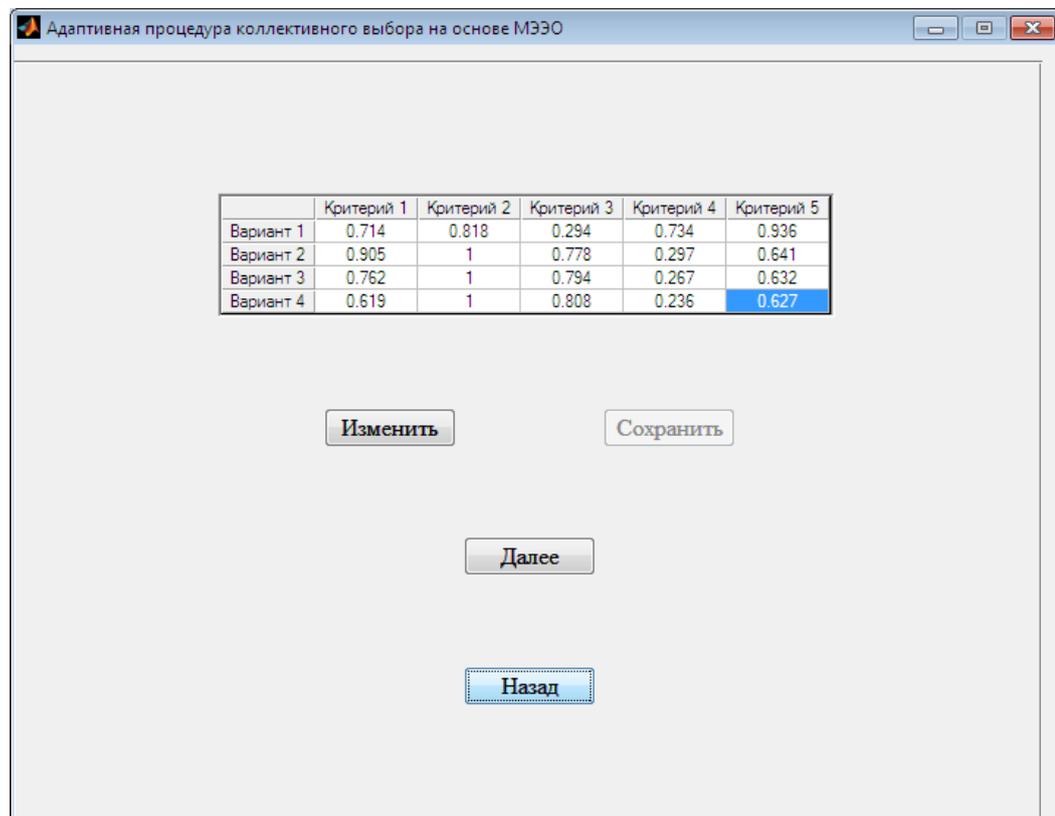
Назад

б)

Рис. П1.2. Диалоговые окна ввода исходных данных с клавиатуры



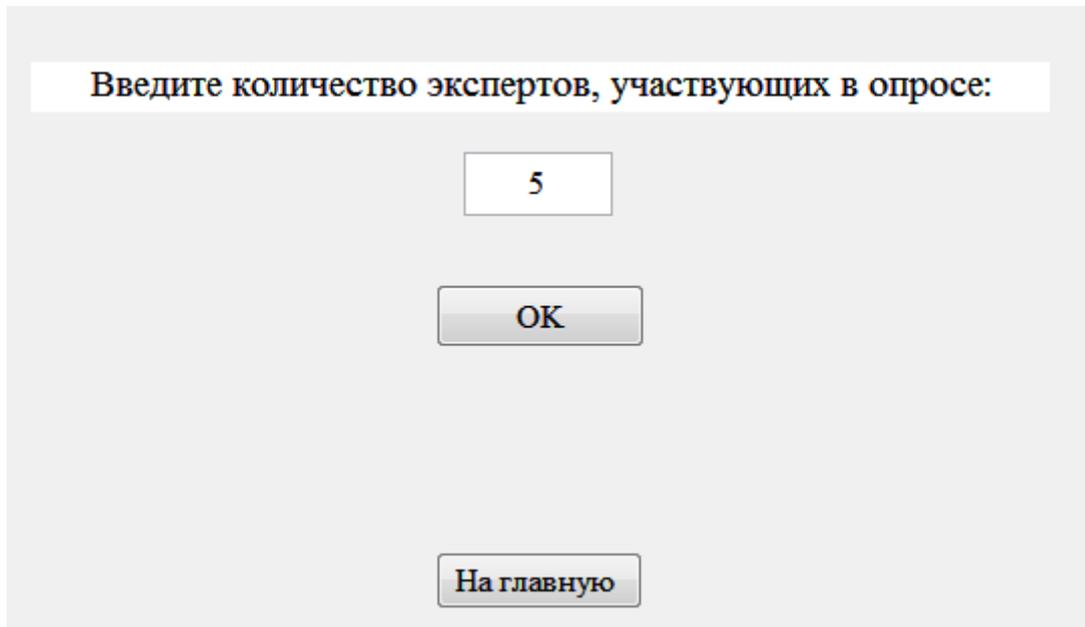
а)



б)

Рис. П1.3. Диалоговые окна чтения исходных данных из файла

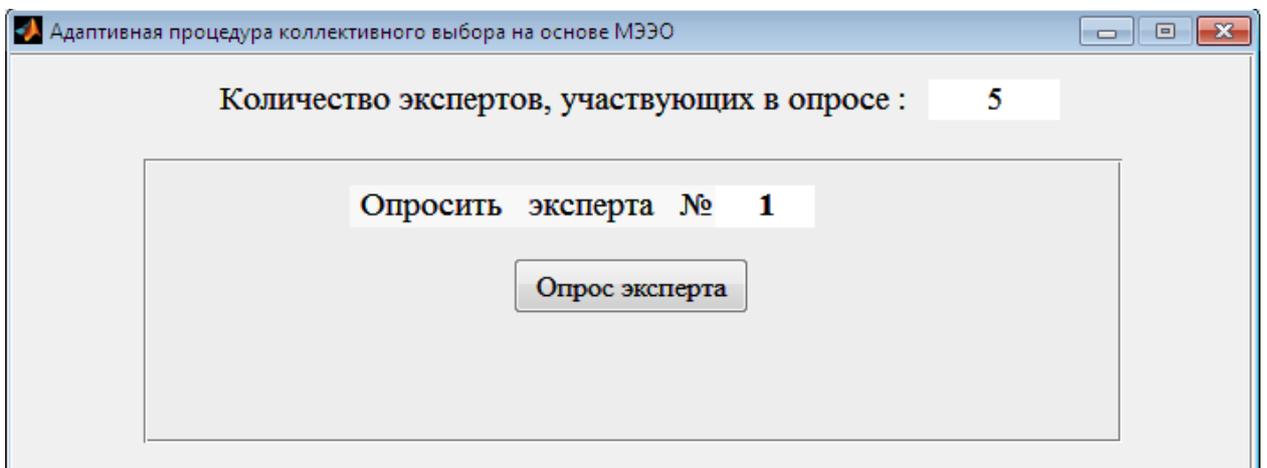
Пользователь с клавиатуры задаёт количество  $N$  экспертов, участвующих в коллективном выборе.



The image shows a dialog box with a light gray background. At the top, there is a white rectangular box containing the text "Введите количество экспертов, участвующих в опросе:". Below this, the number "5" is entered into a small white text input field. Underneath the input field is a gray button with the text "ОК". At the bottom of the dialog box is another gray button with the text "На главную".

Рис. П1.4. Диалоговая форма ввода числа экспертов

## Этап № 2. «Экспертный опрос на порядковой шкале»



The image shows a screenshot of a Windows application window. The title bar contains the text "Адаптивная процедура коллективного выбора на основе МЭЭО" and standard window control buttons. The main content area has a light gray background. At the top, it displays "Количество экспертов, участвующих в опросе : 5" where "5" is in a white text input field. Below this, there is a white rectangular box containing the text "Опросить эксперта № 1". Underneath this box is a gray button with the text "Опрос эксперта".

Рис. П1.5. Форма перехода к опросу очередного эксперта

После нажатия пользователем кнопки «Опрос эксперта» (рис. П1.5) происходит переход к диалоговой форме опроса очередного эксперта на порядковой шкале оценивания. Внешний вид этой формы представлен на рис. П1.6.

В окне интерфейса расположены: таблица, содержащая оценки альтернатив по частным критериям; два выпадающих меню с номерами альтернатив обучающей выборки (соответственно для «лучшей» и «худшей» альтернативы в сравниваемой паре); объект-список, в который выводится формируемая экспертом матрица парных сравнений; кнопка «Добавить предпочтение», по нажатию на которую в матрицу сравнений добавляется отношение предпочтения между очередной парой альтернатив; кнопки «Удалить предпочтение» и «Завершить опрос эксперта», назначение которых приведено ниже.

Экспертный опрос на порядковой шкале  
опрос эксперта №1

Выберите альтернативу: x4

ЛУЧШЕ

Выберите альтернативу: x1

Добавить предпочтение

Удалить предпочтения

Матрица предпочтений:

```

2 1
2 3
2 4
3 1
3 4

```

Завершить опрос эксперта

	Критерий 1	Критерий 2	Критерий 3	Критерий 4	Критерий 5
Вариант 1	0.714	0.818	0.294	0.734	0.936
Вариант 2	0.905	1	0.778	0.297	0.641
Вариант 3	0.762	1	0.794	0.267	0.632
Вариант 4	0.619	1	0.808	0.236	0.627

На главную

Рис. П1.6. Форма экспертного оценивания выборки на порядковой шкале

Назначение кнопки «Удалить предпочтение»: в случае, если опрошиваемый эксперт по какой-либо причине ошибочно указал отношение предпочтения между некоторой парой (некоторыми парами) альтернатив, то информационная система в диалоговом режиме предложит эксперту выбрать из списка те предпочтения, которые, по его мнению, следует удалить из матри-

цы парных сравнений (рис. П1.7).

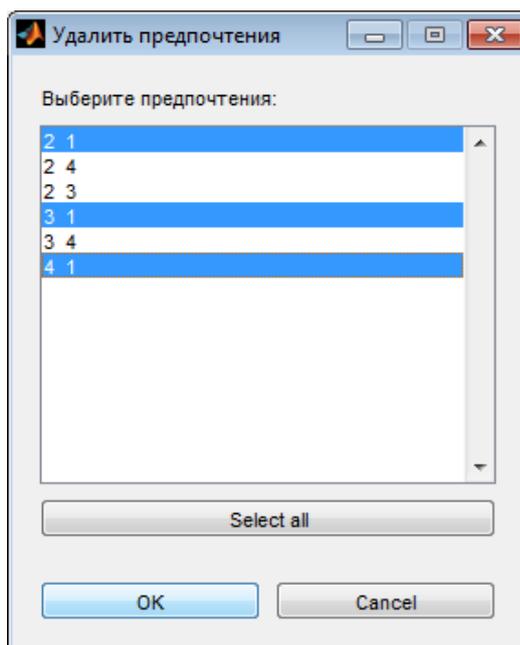


Рис. П1.7. Диалог корректировки матрицы парных сравнений

После того как эксперт упорядочил альтернативы выборки в соответствии со своими предпочтениями, СППР предложит ему подтвердить окончание опроса нажатием кнопки «Завершить опрос эксперта» (рис. П1.6).

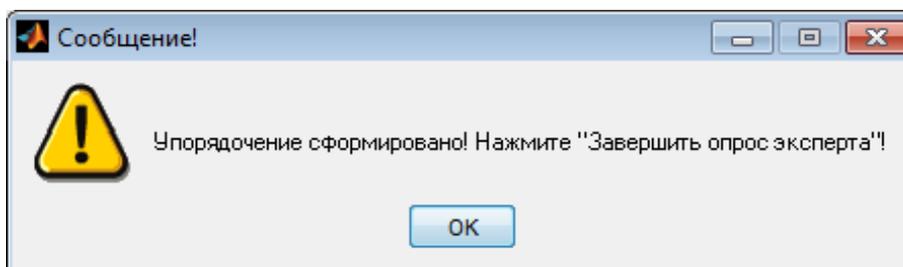


Рис. П1.8. Сообщение об окончании опроса эксперта

После нажатия пользователем кнопки «Завершить опрос эксперта» информационная система осуществит проверку экспертного упорядочения на непротиворечивость и допустимость.

Диалоговое окно уведомления эксперта о возникших в его упорядочении ошибках транзитивности с указанием номеров альтернатив, образующих контур, приведено на рис. П1.9.

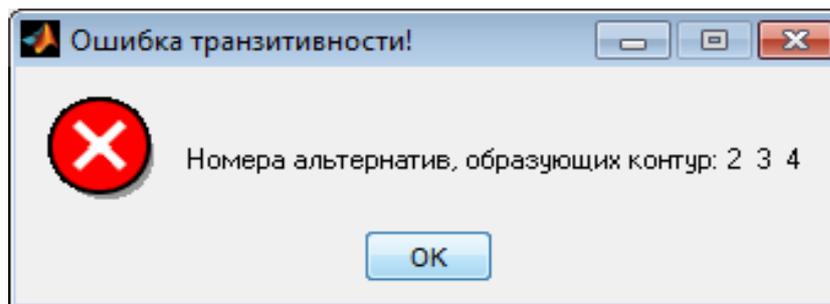


Рис. П1.9. Уведомление об ошибке транзитивности в матрице предпочтений

Далее автоматизированная система в диалоговом режиме предложит эксперту на выбор возможные варианты устранения проблемы противоречивости в его ранжировании.

На рис. П1.10 представлен интерфейс соответствующего диалогового окна, в состав которого входят две функциональные кнопки:

- 1) кнопка «Исправить вручную» – система предложит эксперту самостоятельно исправить возникшие ошибки транзитивности предпочтений;
- 2) кнопка «Автоисправление контура» – в случае, если эксперт не в состоянии устранить противоречия в своём ранжировании, то система поддержки принятия решений воспримет альтернативы, входящие в состав контура, как неразличимые, тем самым осуществив адаптацию экспертного ранжирования к разностно-классификационной шкале оценивания.

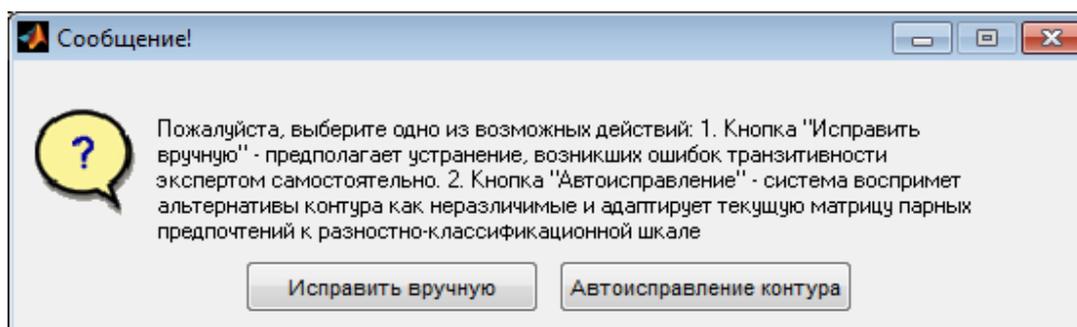


Рис. П1.10. Диалог исправления ошибок транзитивности  
в экспертном ранжировании

В случае, если экспертное упорядочение окажется недопустимым относительно заданной матрицы оценок по частным критериям, то информационная система в диалоговом режиме (рис. П1.11) предупредит опрашиваемого

мого эксперта о том, что его упорядочение может привести к необъяснимому результату на выходе процедуры коллективного выбора.

Далее возможны два варианта развития событий:

- 1) система предложит эксперту произвести повторное ранжирование;
- 2) если эксперт не способен предложить другой вариант ранжирования выборки, автоматизированная система будет вынуждена принять недопустимое упорядочение со всеми нежелательными для итогового выбора последствиями.

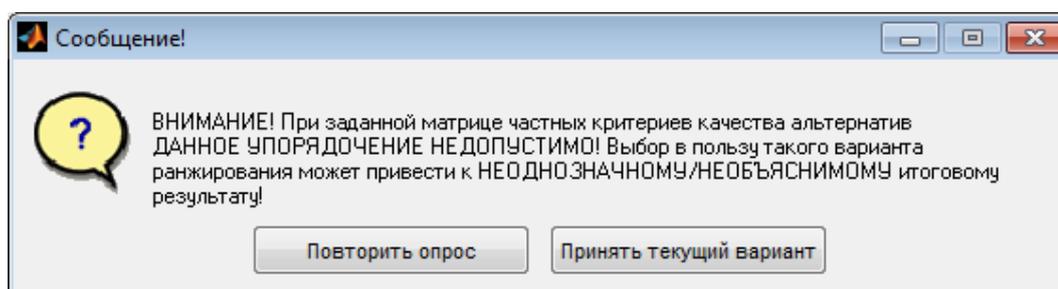


Рис. П1.11. Окно уведомления при недопустимом экспертном упорядочении

### Этап № 3. Анализ профиля упорядочений на устойчивость

После того как все  $N$  экспертов будут опрошены, автоматизированная система предложит пользователю, посредством нажатия кнопки «Анализ профиля упорядочений» (рис. П1.12), перейти к диалоговой форме анализа профиля экспертных ранжирований на устойчивость к бесконечным решениям.

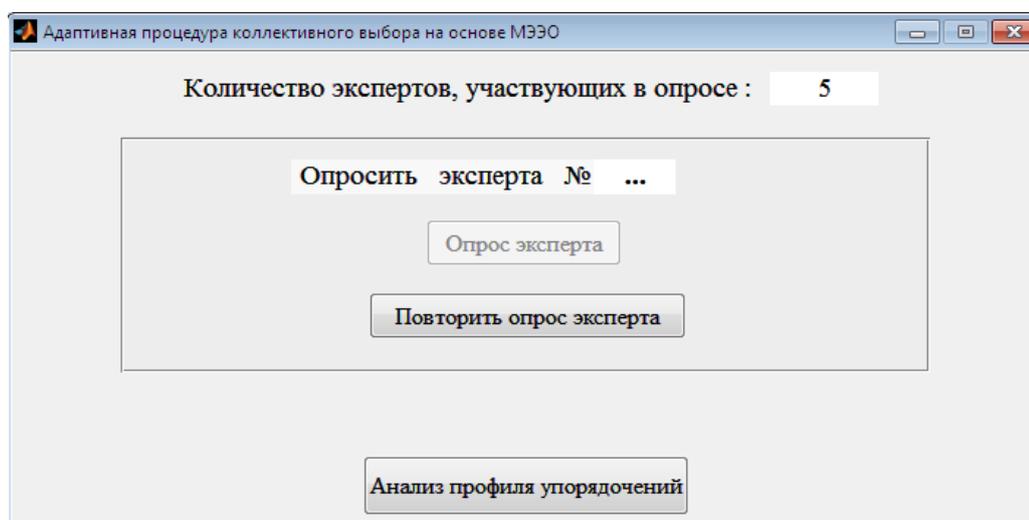


Рис. П1.12. Диалог перехода на форму анализа экспертного профиля

Внешний вид формы анализа профиля экспертных упорядочений представлен на рис. П1.13. После нажатия пользователем кнопки «Произвести анализ» информационная система осуществит проверку профиля, полученного посредством экспертного опроса на порядковой шкале оценивания, на устойчивость путём определения связности графа экспертного упорядочения. Среди компонент формы имеются: текстовое поле, служащее для вывода информации об устойчивости экспертного профиля к бесконечным решениям; список, в который система выводит информацию о структуре графа экспертного упорядочения.

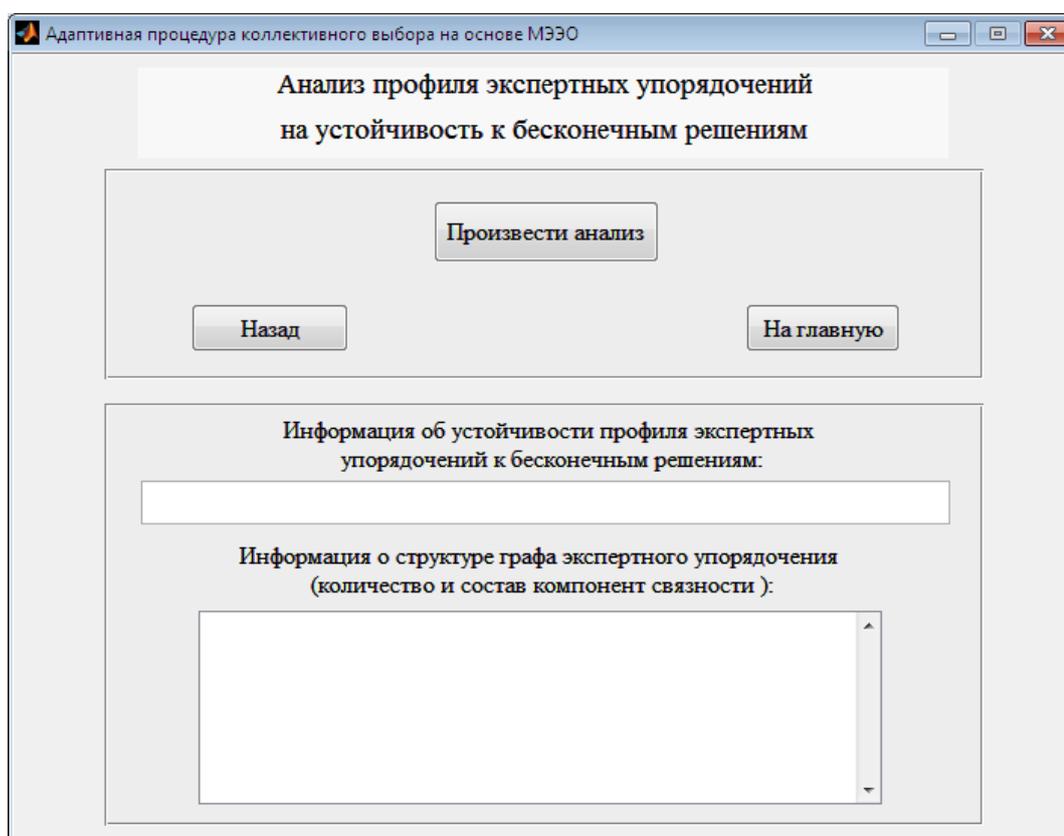


Рис. П1.13. Форма анализа профиля ранжирований на устойчивость

На рис. П1.14 приведён внешний вид формы анализа профиля в ситуации, когда граф экспертного упорядочения – связный. Следовательно, профиль экспертных ранжирований не порождает бесконечных решений. В таком случае для расчёта коэффициентов функции полезности и оценок полезностей альтернатив в МЭЭО достаточно воспользоваться сведениями об экспертном ранжировании выборки на порядковой шкале оценивания –

нажать кнопку «Оптимизация».

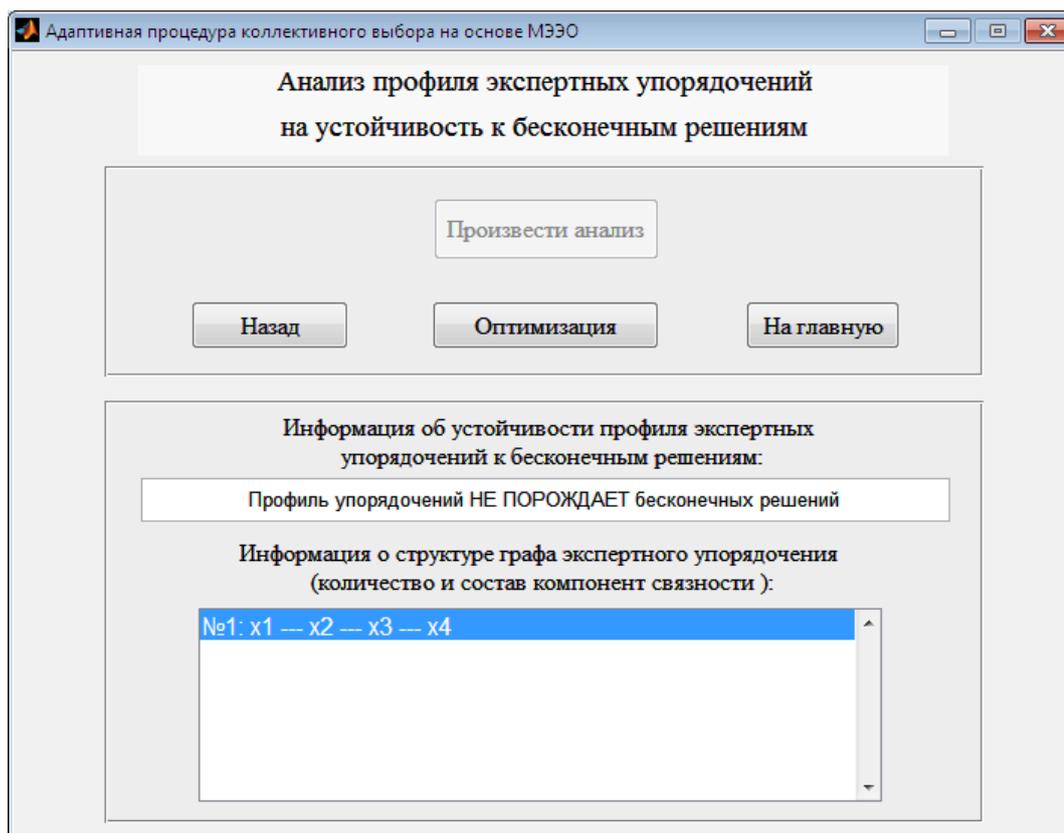


Рис. П1.14. Внешний вид формы анализа профиля при связном графе экспертного упорядочения

В свою очередь, на рис. П1.15 изображён внешний вид формы анализа профиля в случае, когда граф экспертного упорядочения – несвязный. То есть граф имеет больше одной компоненты связности. Откуда следует, что профиль экспертных ранжирований порождает бесконечные решения.

В этой ситуации возможны два выхода (рис. П1.16):

1) повысить точность искомых оценок коэффициентов функции полезности МЭЭО за счёт опроса экспертов на более сильной (по сравнению с порядковой) разностно-классификационной шкале – нажать кнопку «Опрос на РК-шкале»;

2) регуляризация обучающей выборки на основании результатов анализа профиля упорядочений, и решение задачи коллективного выбора с новыми исходными данными – нажать кнопку «Регуляризация».

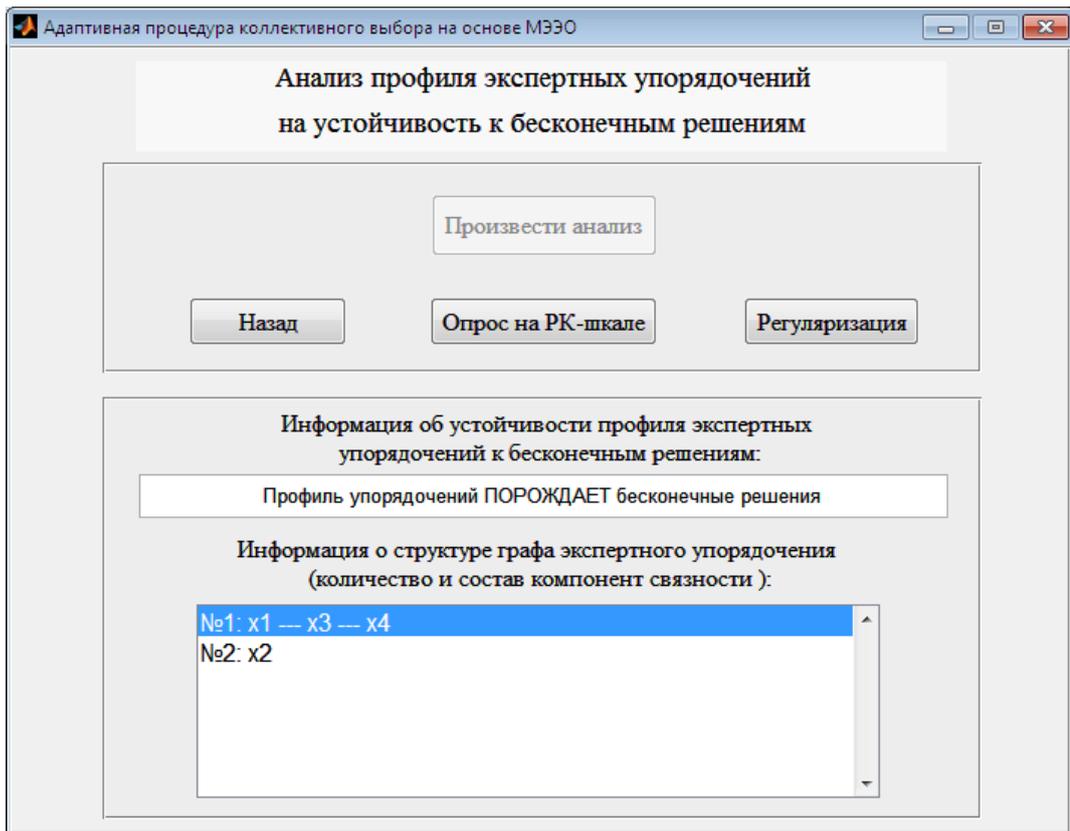


Рис. П1.15. Вид формы анализа профиля при несвязном графе экспертного упорядочения

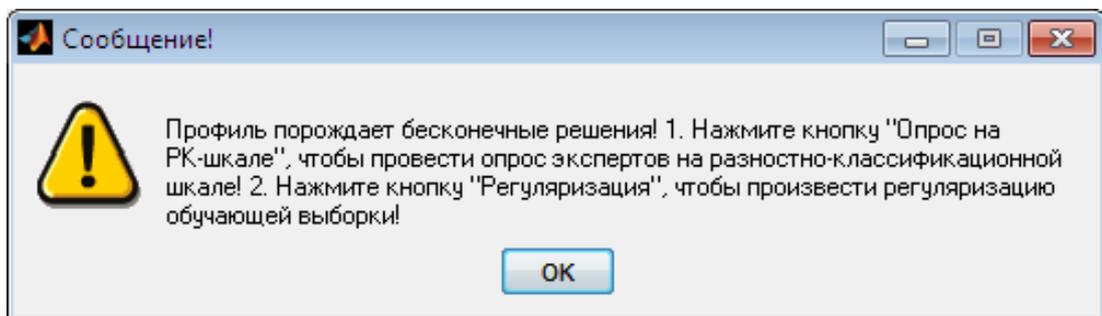


Рис. П1.16. Окно уведомления о том, что профиль экспертных упорядочений порождает бесконечные решения

## Этап 4. Экспертный опрос на разностно-классификационной шкале

Адаптивная процедура коллективного выбора на основе МЭЭО

Экспертный опрос на разностно-классификационной шкале  
опрос эксперта №2

Выберите альтернативу: x1

Выберите альтернативу: x4

Выберите класс: Q2

Матрица предпочтений:

2	1	2
2	3	1
2	4	4
3	1	1
3	4	3

	Критерий 1	Критерий 2	Критерий 3	Критерий 4	Критерий 5
Вариант 1	0.714	0.818	0.294	0.734	0.936
Вариант 2	0.905	1	0.778	0.297	0.641
Вариант 3	0.762	1	0.794	0.267	0.632
Вариант 4	0.619	1	0.808	0.236	0.627

Рис. П1.17. Форма экспертного ранжирования обучающей выборки на разностно-классификационной шкале оценивания

Внешний вид диалоговой формы опроса экспертов на разностно-классификационной шкале представлен на рисунке П1.17.

В окне интерфейса расположены: таблица оценок альтернатив по частным критериям; к двум выпадающим меню с номерами альтернатив обучающей выборки добавляется третье, позволяющее устанавливать к какому классу предпочтения на РК-шкале ( $Q_0, Q_1, \dots, Q_s$ ) относится сравниваемая пара альтернатив; список, в который выводится формируемая экспертом матрица парных сравнений; кнопка «Добавить класс», нажатие на которую позволяет добавлять в соответствующее выпадающее меню новый класс предпочтения; кнопки «Добавить предпочтение», «Удалить предпочтения» и «Завершить опрос эксперта», назначение которых аналогично назначению соответствующих кнопок на форме опроса экспертов на порядковой шкале оценивания (см. рис. П1.6).

## Этап 5. Оптимизация

На данном этапе, после нажатия пользователем кнопки «Поиск решений» (рис. П1.18), система поддержки принятия решений осуществит поиск коэффициентов функции полезности МЭЭО и оценок полезностей альтернатив обучающей выборки. Затем результаты оптимизации будут выведены на экран (рис. П1.19).

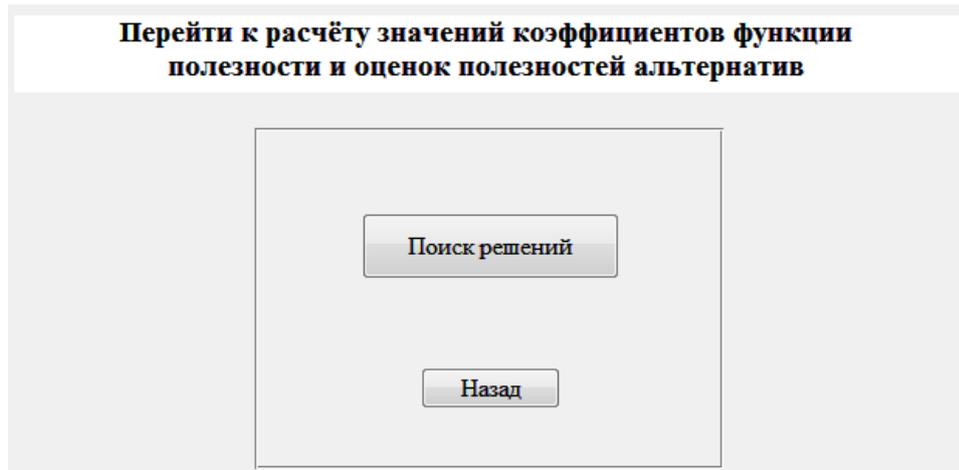


Рис. П1.18. Диалоговая форма перехода к поиску решений

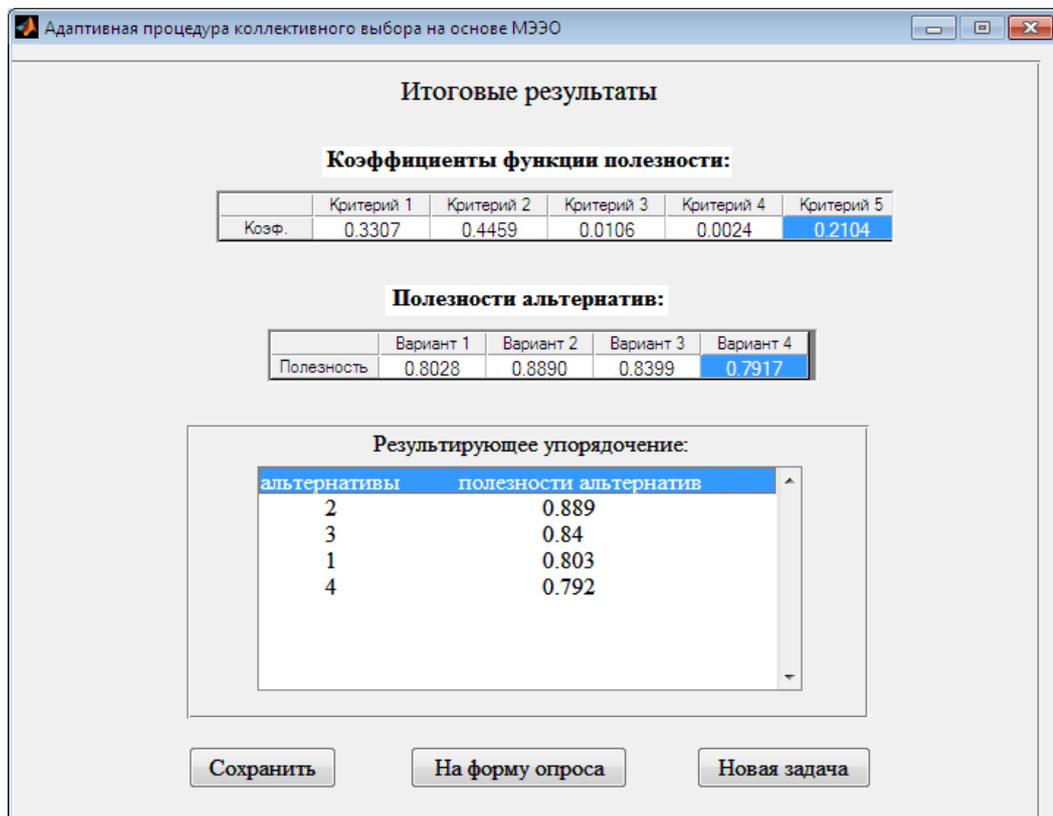


Рис. П1.19. Диалоговая форма вывода результатов оптимизации

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Результаты расчетов вероятностных характеристик для различных моделей  
выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера

Таблица П2.1– Значения вероятностных характеристик

Истинная полезность средней альтернативы	Наименование пара- метра	Модель процедуры Терстоуна- Мостеллера	Среднеквадратичное отклонение экспертной оценки ( $s$ )							
			$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.042	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Традици- онная	0.042	0.044	0.048	0.051	0.054	0.059	0.070	0.086
		Линеаризо- ванная на РК-шкале	0.039	0.038	0.036	0.034	0.033	0.031	0.028	0.026
		Линеаризо- ванная на комбин.шкл.	0.041	0.040	0.037	0.036	0.034	0.032	0.028	0.026
		Взвешенная на РК-шкале	0.041	0.040	0.041	0.042	0.044	0.046	0.052	0.064
		Взвешенная на комбин. шкале	0.042	0.042	0.043	0.043	0.045	0.047	0.053	0.064
		Нелинейная на порядков. шкале	0.038	0.037	0.036	0.036	0.038	0.040	0.046	0.057
		Нелинейная на РК-шкале	0.040	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037	0.035	0.035
		Адаптивная	0.041	0.041	0.040	0.040	0.039	0.037	0.036	0.035
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Традици- онная	0.247	0.216	0.194	0.189	0.187	0.186	0.189	0.196
		Линеаризо- ванная на РК-шкале	0.229	0.188	0.146	0.131	0.115	0.099	0.076	0.056
Линеаризо- ванная на комбин.шкл.		0.240	0.199	0.155	0.138	0.121	0.103	0.077	0.056	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.042	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Взвешенная на РК-шкале	0.228	0.191	0.159	0.150	0.143	0.138	0.137	0.141
		Взвешенная на комбин. шкале	0.243	0.207	0.170	0.158	0.148	0.141	0.137	0.141
		Нелинейная на порядков. шкале	0.238	0.197	0.158	0.148	0.139	0.134	0.133	0.138
		Нелинейная на РК-шкале	0.226	0.189	0.152	0.140	0.127	0.115	0.097	0.081
		Адаптивная	0.239	0.201	0.161	0.147	0.133	0.118	0.097	0.081
0.25	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.251	0.255	0.268	0.276	0.287	0.303	0.336	0.383
		Линеаризованная на РК-шкале	0.243	0.239	0.231	0.227	0.221	0.213	0.198	0.176
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.247	0.244	0.238	0.233	0.227	0.218	0.199	0.176
		Взвешенная на РК-шкале	0.246	0.245	0.245	0.245	0.246	0.248	0.251	0.257
		Взвешенная на комбин. шкале	0.251	0.252	0.252	0.252	0.252	0.251	0.252	0.257
		Нелинейная на порядков. шкале	0.239	0.234	0.228	0.229	0.232	0.239	0.265	0.315
		Нелинейная на РК-шкале	0.245	0.244	0.243	0.242	0.242	0.242	0.242	0.242
		Адаптивная	0.249	0.249	0.249	0.248	0.247	0.246	0.243	0.243
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.278	0.246	0.212	0.202	0.194	0.187	0.184	0.193
		Линеаризованная на РК-шкале	0.270	0.237	0.201	0.189	0.177	0.165	0.148	0.133
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.277	0.243	0.206	0.193	0.181	0.168	0.150	0.134

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.25	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Взвешенная на РК-шкале	0.264	0.229	0.190	0.176	0.162	0.146	0.118	0.084
		Взвешенная на комбин. шкале	0.269	0.235	0.196	0.182	0.166	0.149	0.120	0.085
		Нелинейная на порядков. шкале	0.289	0.261	0.230	0.219	0.208	0.198	0.187	0.189
		Нелинейная на РК-шкале	0.265	0.232	0.197	0.186	0.176	0.166	0.152	0.136
		Адаптивная	0.272	0.238	0.203	0.191	0.180	0.169	0.154	0.136
0.389	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.389	0.391	0.399	0.404	0.411	0.421	0.441	0.466
		Линеаризованная на РК-шкале	0.385	0.382	0.377	0.375	0.371	0.366	0.354	0.334
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.387	0.386	0.382	0.379	0.375	0.370	0.356	0.334
		Взвешенная на РК-шкале	0.386	0.386	0.385	0.384	0.383	0.380	0.373	0.355
		Взвешенная на комбин. шкале	0.390	0.390	0.390	0.389	0.387	0.384	0.374	0.355
		Нелинейная на порядков. шкале	0.383	0.379	0.375	0.375	0.377	0.382	0.400	0.436
		Нелинейная на РК-шкале	0.386	0.385	0.385	0.386	0.387	0.388	0.392	0.396
		Адаптивная	0.388	0.388	0.389	0.390	0.390	0.391	0.394	0.396
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.299	0.264	0.217	0.199	0.180	0.160	0.131	0.112
		Линеаризованная на РК-шкале	0.295	0.263	0.227	0.215	0.203	0.191	0.177	0.168
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.299	0.266	0.227	0.214	0.201	0.190	0.176	0.168

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.389	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Взвешенная на РК-шкале	0.287	0.253	0.213	0.199	0.185	0.172	0.154	0.140
		Взвешенная на комбин. шкале	0.286	0.253	0.213	0.199	0.185	0.172	0.154	0.140
		Нелинейная на порядков. шкале	0.318	0.296	0.269	0.257	0.242	0.225	0.190	0.149
		Нелинейная на РК-шкале	0.289	0.255	0.213	0.198	0.182	0.166	0.142	0.119
		Адаптивная	0.292	0.257	0.214	0.198	0.182	0.166	0.142	0.119
0.444	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.445	0.446	0.450	0.452	0.456	0.461	0.472	0.485
		Линеаризованная на РК-шкале	0.442	0.441	0.438	0.437	0.435	0.432	0.426	0.414
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.443	0.443	0.441	0.439	0.437	0.434	0.427	0.414
		Взвешенная на РК-шкале	0.443	0.443	0.442	0.442	0.441	0.439	0.434	0.421
		Взвешенная на комбин. шкале	0.445	0.445	0.445	0.444	0.443	0.441	0.435	0.421
		Нелинейная на порядков. шкале	0.441	0.439	0.437	0.437	0.438	0.441	0.451	0.470
		Нелинейная на РК-шкале	0.443	0.443	0.443	0.443	0.444	0.445	0.447	0.450
		Адаптивная	0.444	0.444	0.445	0.445	0.446	0.447	0.448	0.450
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.303	0.267	0.218	0.198	0.176	0.151	0.113	0.077
		Линеаризованная на РК-шкале	0.300	0.269	0.232	0.219	0.207	0.196	0.182	0.173
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.303	0.270	0.230	0.217	0.204	0.193	0.181	0.173
		Взвешенная на РК-шкале	0.292	0.258	0.218	0.205	0.192	0.180	0.168	0.162

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.444	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Взвешенная на комбин. шкале	0.290	0.256	0.216	0.202	0.189	0.178	0.167	0.162
		Нелинейная на порядков. шкале	0.324	0.303	0.277	0.264	0.249	0.229	0.187	0.129
		Нелинейная на РК-шкале	0.293	0.259	0.215	0.198	0.181	0.162	0.134	0.107
		Адаптивная	0.296	0.261	0.215	0.198	0.179	0.161	0.133	0.106
0.57	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.570	0.568	0.563	0.560	0.555	0.549	0.536	0.519
		Линеаризованная на РК-шкале	0.573	0.574	0.578	0.579	0.582	0.585	0.593	0.607
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.571	0.572	0.574	0.576	0.579	0.583	0.592	0.607
		Взвешенная на РК-шкале	0.572	0.572	0.573	0.574	0.575	0.576	0.583	0.598
		Взвешенная на комбин. шкале	0.570	0.569	0.570	0.570	0.572	0.574	0.582	0.597
		Нелинейная на порядков. шкале	0.575	0.577	0.580	0.580	0.579	0.575	0.562	0.538
		Нелинейная на РК-шкале	0.572	0.573	0.573	0.572	0.572	0.570	0.567	0.565
		Адаптивная	0.571	0.570	0.570	0.569	0.569	0.568	0.566	0.564
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.302	0.266	0.218	0.198	0.177	0.153	0.117	0.085
		Линеаризованная на РК-шкале	0.299	0.268	0.231	0.219	0.206	0.195	0.181	0.172
		Линеаризованная на комбин.шкл.	0.302	0.269	0.230	0.216	0.204	0.193	0.180	0.172
		Взвешенная на РК-шкале	0.291	0.257	0.217	0.204	0.190	0.178	0.165	0.158

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.57	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Взвешенная на комбин. шкале	0.289	0.256	0.215	0.202	0.189	0.177	0.164	0.158
		Нелинейная на порядков. шкале	0.323	0.302	0.275	0.263	0.248	0.229	0.188	0.134
		Нелинейная на РК-шкале	0.293	0.258	0.215	0.198	0.181	0.163	0.135	0.109
		Адаптивная	0.295	0.260	0.215	0.198	0.180	0.162	0.134	0.109
0.833	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.833	0.828	0.816	0.809	0.798	0.784	0.754	0.708
		Линеаризованная на РК-шкале	0.840	0.844	0.851	0.855	0.860	0.866	0.878	0.891
		Линеаризованная на комбин. шкл.	0.836	0.839	0.845	0.850	0.856	0.863	0.877	0.891
		Взвешенная на РК-шкале	0.837	0.837	0.836	0.835	0.833	0.829	0.817	0.795
		Взвешенная на комбин. шкале	0.832	0.832	0.831	0.830	0.829	0.826	0.816	0.795
		Нелинейная на порядков. шкале	0.844	0.849	0.853	0.852	0.850	0.843	0.822	0.783
		Нелинейная на РК-шкале	0.838	0.839	0.841	0.842	0.843	0.845	0.848	0.849
		Адаптивная	0.835	0.835	0.836	0.838	0.840	0.842	0.847	0.849
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.263	0.232	0.205	0.199	0.195	0.194	0.199	0.215
		Линеаризованная на РК-шкале	0.251	0.215	0.177	0.164	0.151	0.138	0.119	0.102
		Линеаризованная на комбин. шкл.	0.260	0.224	0.185	0.171	0.157	0.143	0.121	0.102
		Взвешенная на РК-шкале	0.246	0.210	0.174	0.161	0.149	0.137	0.121	0.110

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.833	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Взвешенная на комбин. шкале	0.256	0.221	0.183	0.169	0.156	0.142	0.123	0.110
		Нелинейная на порядков. шкале	0.267	0.233	0.199	0.188	0.179	0.173	0.171	0.184
		Нелинейная на РК-шкале	0.247	0.213	0.179	0.169	0.160	0.151	0.137	0.122
		Адаптивная	0.257	0.222	0.187	0.176	0.165	0.154	0.139	0.123
0.917	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.916	0.913	0.905	0.900	0.894	0.885	0.866	0.836
		Линеаризованная на РК-шкале	0.921	0.923	0.928	0.930	0.933	0.936	0.943	0.947
		Линеаризованная на комбин. шкл.	0.919	0.920	0.925	0.927	0.931	0.935	0.942	0.947
		Взвешенная на РК-шкале	0.919	0.919	0.918	0.916	0.914	0.910	0.899	0.879
		Взвешенная на комбин. шкале	0.916	0.915	0.915	0.914	0.912	0.909	0.899	0.879
		Нелинейная на порядков. шкале	0.923	0.926	0.928	0.927	0.926	0.921	0.910	0.889
		Нелинейная на РК-шкале	0.920	0.921	0.922	0.923	0.924	0.926	0.929	0.929
		Адаптивная	0.918	0.918	0.919	0.921	0.922	0.925	0.928	0.929
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Традиционная	0.251	0.220	0.196	0.192	0.190	0.190	0.196	0.209
		Линеаризованная на РК-шкале	0.234	0.195	0.154	0.139	0.125	0.110	0.087	0.068
		Линеаризованная на комбин. шкл.	0.244	0.206	0.163	0.147	0.131	0.114	0.089	0.068
		Взвешенная на РК-шкале	0.232	0.195	0.161	0.151	0.143	0.136	0.132	0.136

Продолжение таблицы П2.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.917	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Взвешенная на комбин. шкале	0.246	0.209	0.172	0.160	0.149	0.140	0.133	0.136
		Нелинейная на порядков. шкале	0.246	0.207	0.169	0.158	0.150	0.144	0.145	0.155
		Нелинейная на РК-шкале	0.231	0.195	0.159	0.148	0.137	0.126	0.110	0.094
		Адаптивная	0.244	0.207	0.168	0.156	0.142	0.129	0.110	0.095

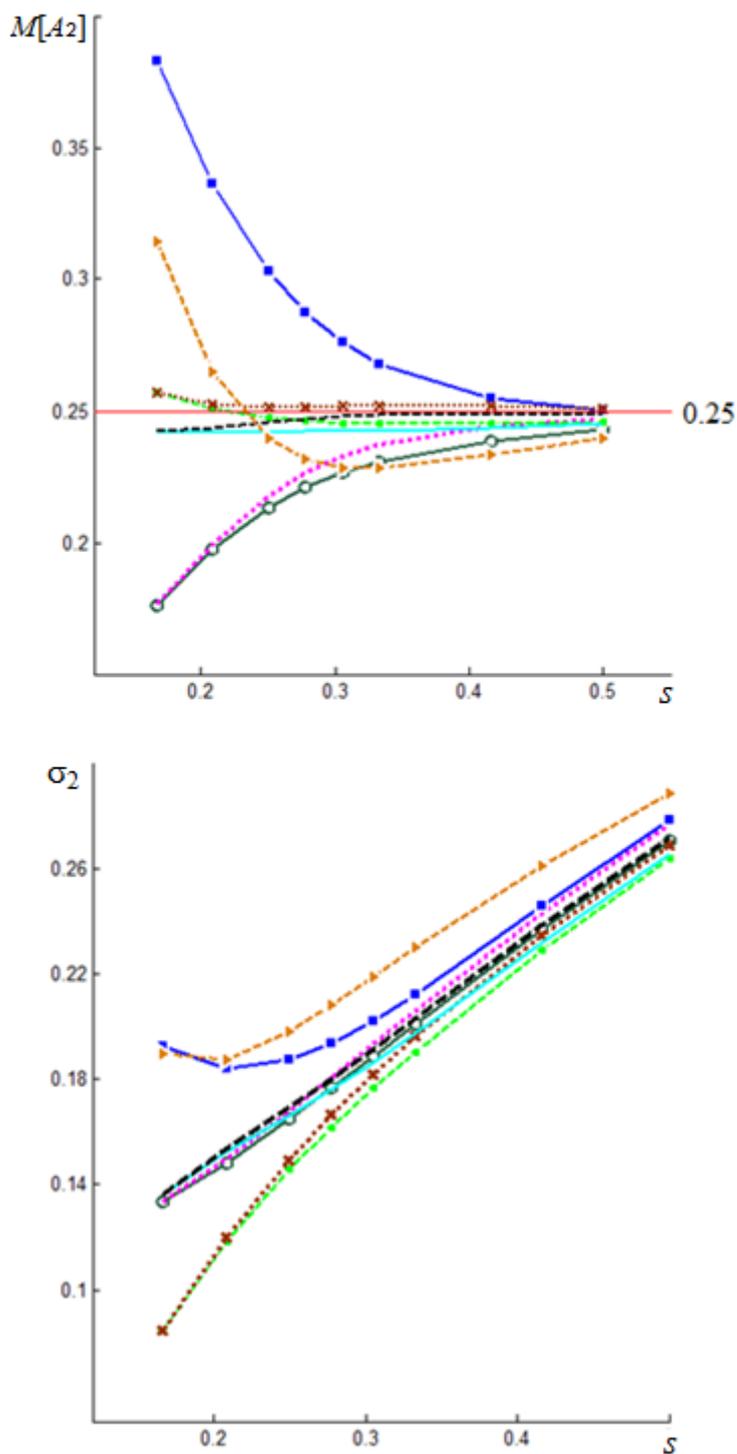


Рис. ПЗ.1. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при  $w_2 = 0.25$  для моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера: —○— линейризованная на РК-шкале; ..... линейризованная на комбинированной шкале; —■— традиционная процедура; —◆— взвешенная на РК-шкале; .....×..... взвешенная на комбинированной шкале; ——— нелинейная на РК-шкале; - - - - - адаптивная процедура; - - -▶- - - нелинейная на порядковой шкале

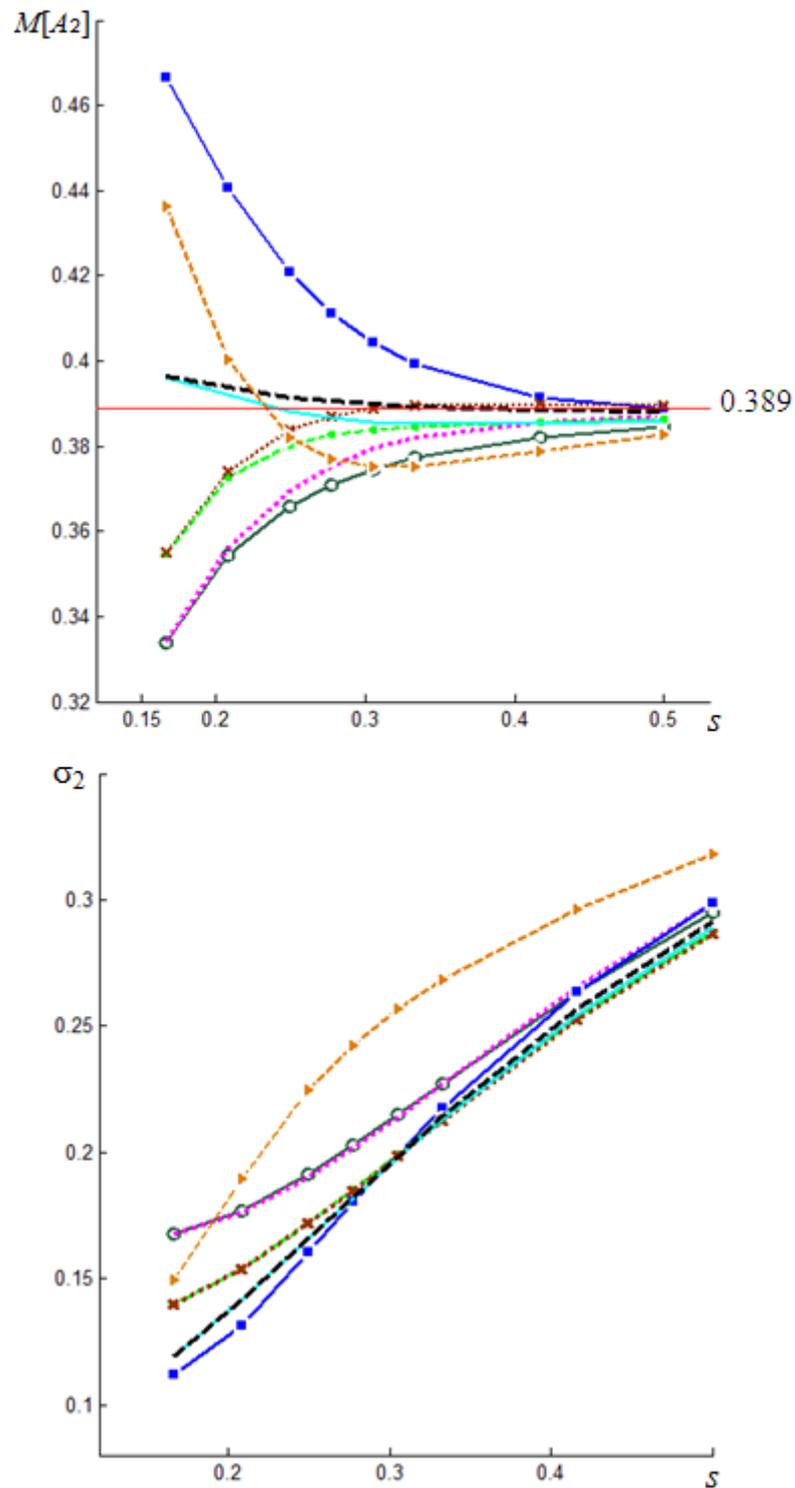


Рис. ПЗ.2. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при  $w_2 = 0.389$  для моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера: —○— линейризованная на РК-шкале; ..... линейризованная на комбинированной шкале; —■— традиционная процедура; - - - взвешенная на РК-шкале; .....×..... взвешенная на комбинированной шкале; — нелинейная на РК-шкале; - - - адаптивная процедура; - - -> - - нелинейная на порядковой шкале

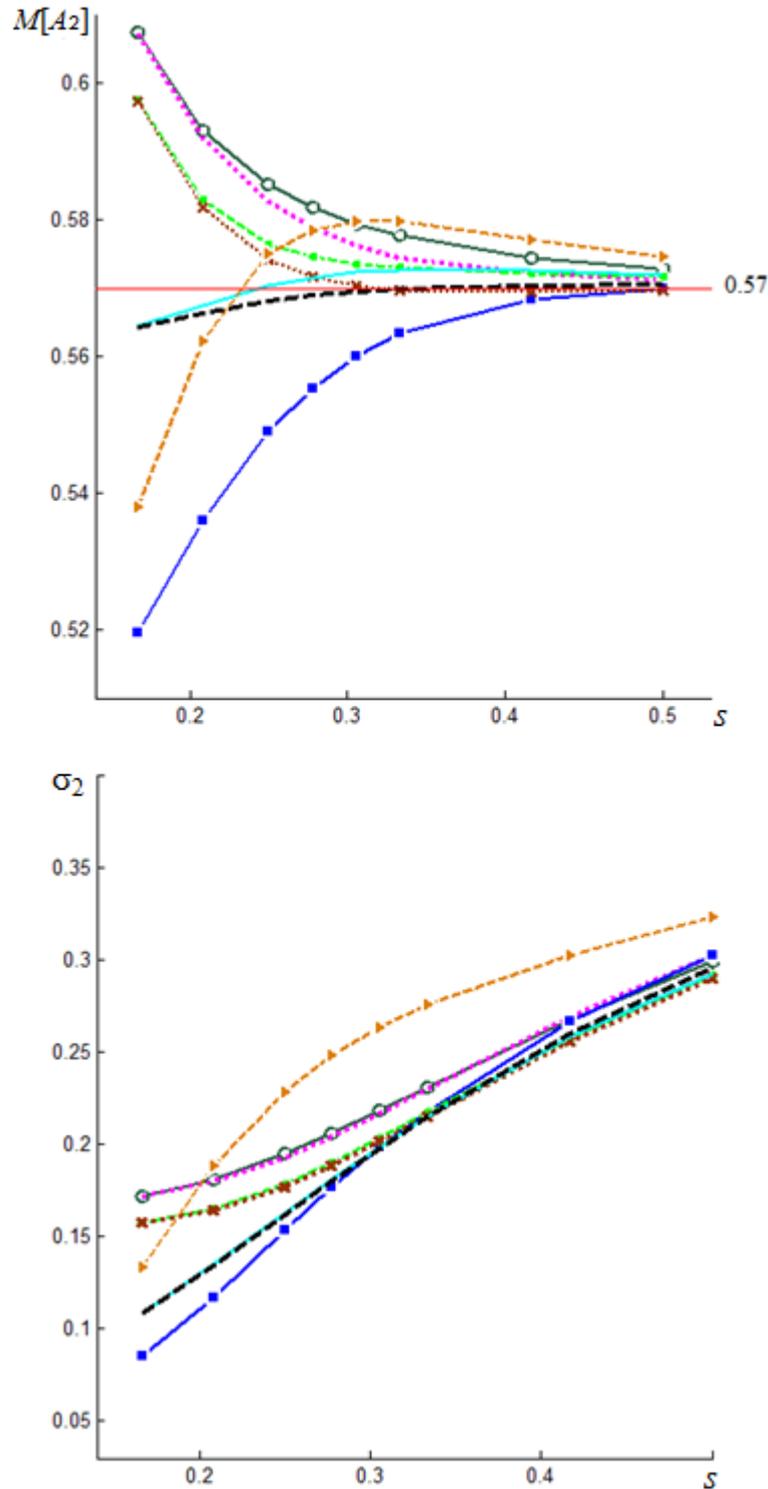


Рис. ПЗ.3. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при  $w_2 = 0.57$  для моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера: —○— линейризованная на РК-шкале; ..... линейризованная на комбинированной шкале; —■— традиционная процедура; - - - взвешенная на РК-шкале; .....×..... взвешенная на комбинированной шкале; — нелинейная на РК-шкале; - - - адаптивная процедура; - - -> нелинейная на порядковой шкале

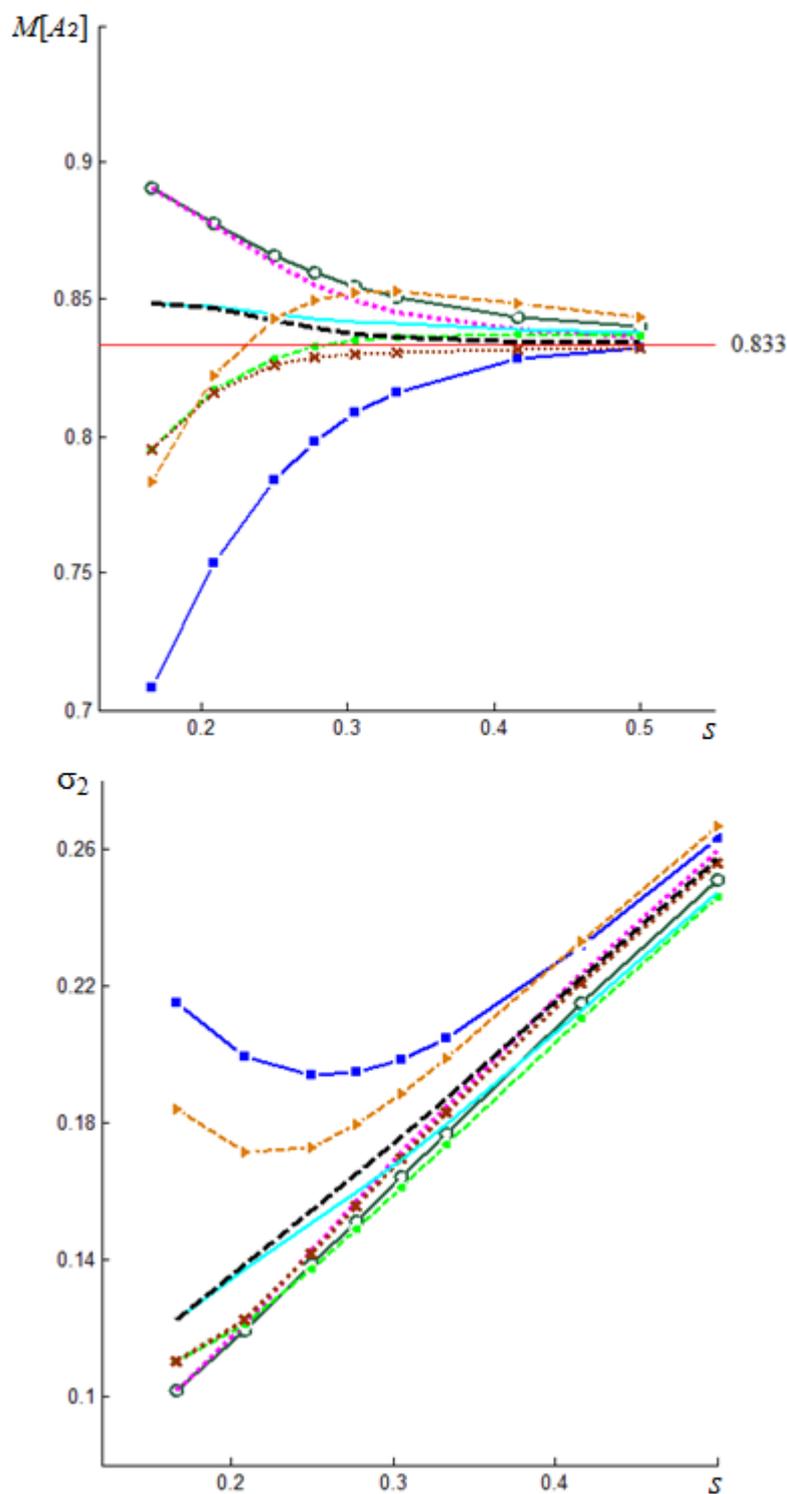


Рис. ПЗ.4. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при  $w_2 = 0.833$  для моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера: —○— линейризованная на РК-шкале; ..... линейризованная на комбинированной шкале; —■— традиционная процедура; - - - взвешенная на РК-шкале; .....×..... взвешенная на комбинированной шкале; — нелинейная на РК-шкале; - - - адаптивная процедура; - - -> нелинейная на порядковой шкале

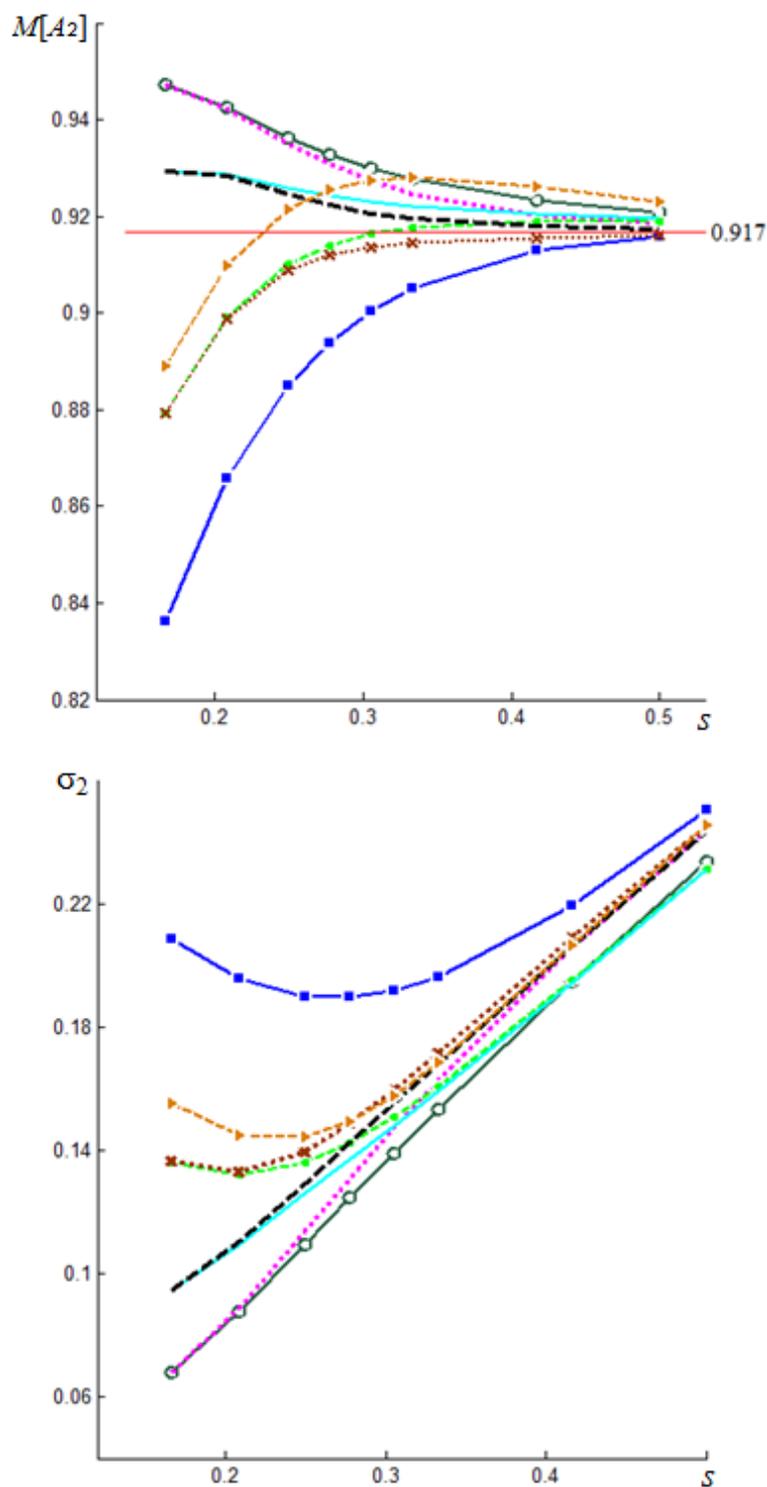


Рис. ПЗ.5. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при  $w_2 = 0.917$  для моделей выбора на основе процедуры Терстоуна-Мостеллера: —○— линейризованная на РК-шкале; ..... линейризованная на комбинированной шкале; —■— традиционная процедура; - - - взвешенная на РК-шкале; .....\*..... взвешенная на комбинированной шкале; — неллинейная на РК-шкале; - - - - адаптивная процедура; - - ▸ - - неллинейная на порядковой шкале

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Результаты расчетов вероятностных характеристик для процедур коллективного выбора, пригодных для экстраполяции экспертных оценок

Таблица П3.1 – Значения вероятностных характеристик

Истинная полезность средней альтернативы	Наименование пара- метра	Название процедуры	Среднеквадратичное отклонение экспертной оценки ( $s$ )						
			$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.08	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.080	0.082	0.089	0.106	0.129	0.152	0.195
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.070	0.064	0.056	0.054	0.063	0.075	0.102
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.075	0.070	0.064	0.066	0.077	0.092	0.123
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.078	0.077	0.076	0.071	0.066	0.063	0.070
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.079	0.079	0.078	0.073	0.069	0.069	0.079
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.249	0.217	0.191	0.182	0.188	0.198	0.22
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.25	0.21	0.168	0.137	0.135	0.143	0.164
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.259	0.217	0.173	0.140	0.139	0.147	0.168
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.233	0.197	0.161	0.127	0.106	0.094	0.087
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.243	0.206	0.169	0.129	0.107	0.095	0.088

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.24	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.24	0.243	0.254	0.285	0.325	0.364	0.424
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.222	0.210	0.193	0.188	0.215	0.258	0.347
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.234	0.224	0.211	0.211	0.241	0.283	0.366
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.236	0.234	0.233	0.231	0.227	0.225	0.229
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.239	0.239	0.238	0.235	0.232	0.231	0.237
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.276	0.244	0.210	0.184	0.182	0.191	0.216
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.302	0.280	0.256	0.228	0.215	0.215	0.228
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.304	0.276	0.244	0.210	0.198	0.200	0.218
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.265	0.231	0.196	0.166	0.151	0.140	0.114
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.270	0.237	0.201	0.168	0.150	0.136	0.108
0.37	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.370	0.372	0.379	0.400	0.428	0.453	0.485
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.358	0.349	0.337	0.334	0.360	0.400	0.465
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.372	0.364	0.352	0.351	0.377	0.413	0.470
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.367	0.366	0.366	0.368	0.371	0.372	0.365
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.369	0.369	0.370	0.372	0.375	0.377	0.371

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.37	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.297	0.263	0.22	0.168	0.138	0.126	0.126
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.337	0.324	0.309	0.275	0.232	0.193	0.150
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.332	0.313	0.288	0.246	0.204	0.172	0.141
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.288	0.253	0.212	0.167	0.141	0.125	0.101
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.290	0.255	0.213	0.167	0.141	0.123	0.101
0.48	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.480	0.480	0.481	0.485	0.490	0.494	0.499
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.478	0.477	0.475	0.474	0.479	0.486	0.497
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.491	0.488	0.483	0.478	0.482	0.488	0.497
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.479	0.479	0.479	0.480	0.481	0.481	0.480
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.480	0.480	0.480	0.481	0.482	0.483	0.482
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.305	0.270	0.223	0.158	0.108	0.072	0.032
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.349	0.340	0.328	0.290	0.228	0.161	0.066
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.341	0.325	0.303	0.257	0.197	0.138	0.057
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.296	0.261	0.216	0.161	0.126	0.105	0.088
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.297	0.262	0.215	0.159	0.123	0.102	0.084

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.83	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.83	0.827	0.817	0.788	0.751	0.714	0.65
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.847	0.858	0.873	0.877	0.858	0.828	0.76
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.849	0.856	0.864	0.86	0.836	0.804	0.735
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.834	0.835	0.837	0.841	0.848	0.852	0.842
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.831	0.831	0.833	0.839	0.844	0.845	0.833
	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.264	0.231	0.202	0.187	0.193	0.206	0.236
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.279	0.249	0.217	0.19	0.187	0.196	0.224
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.27	0.239	0.208	0.183	0.181	0.19	0.219
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.25	0.215	0.181	0.152	0.138	0.128	0.111
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.258	0.223	0.188	0.155	0.137	0.124	0.105
0.96	Математическое ожидание оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.96	0.959	0.955	0.945	0.933	0.921	0.896
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.966	0.969	0.973	0.974	0.97	0.964	0.951
		МЭЭО-ММП на порядковой шкале	0.966	0.968	0.97	0.968	0.962	0.955	0.94
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.961	0.962	0.962	0.965	0.968	0.969	0.965
		Адаптивная проц. Терстоуна-Мостеллера	0.961	0.961	0.962	0.965	0.968	0.968	0.962

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.96	Среднеквадратичное отклонение оценки полезности средней альтернативы	Борда	0.247	0.214	0.189	0.178	0.181	0.187	0.199
		Сысоева-Чирко-Десятова	0.241	0.197	0.15	0.116	0.113	0.117	0.128
		МЭЭО-ММП на порядковой шка- ле	0.233	0.192	0.152	0.124	0.122	0.126	0.137
		МЭЭО-ММП на РК - шкале	0.229	0.191	0.153	0.116	0.092	0.078	0.071
		Адаптивная проц. Терстоуна- Мостеллера	0.24	0.201	0.161	0.118	0.093	0.081	0.075

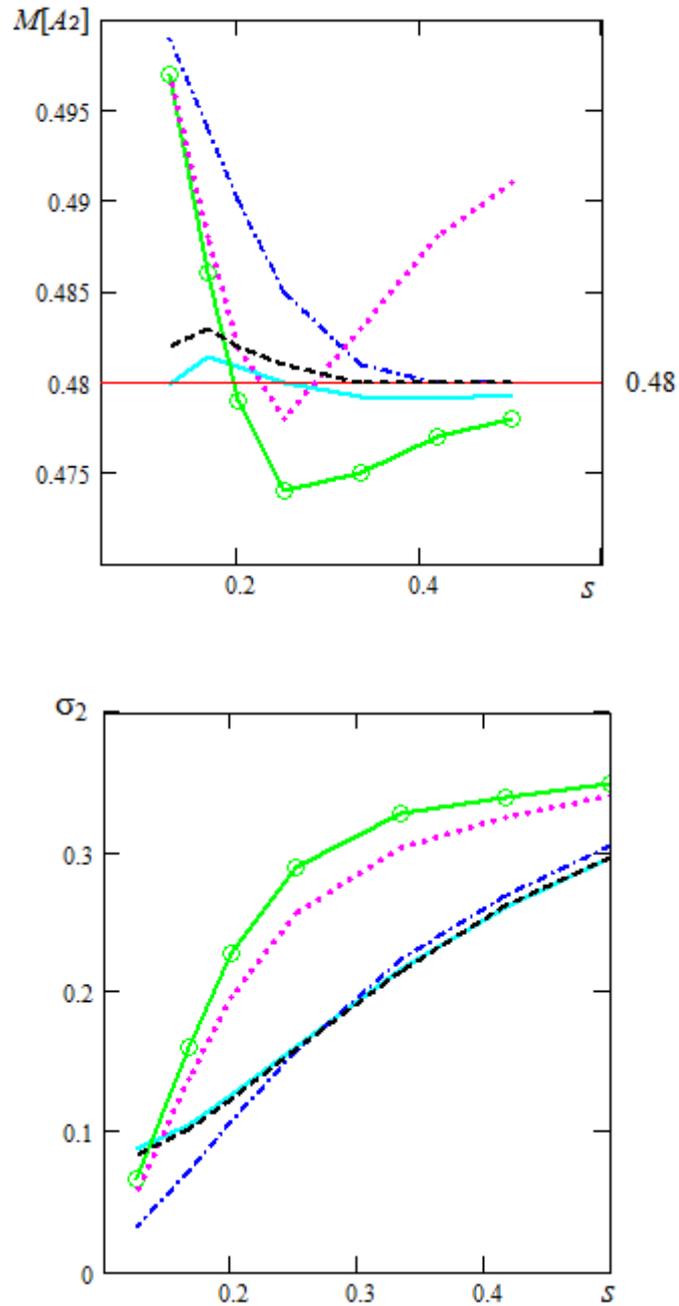


Рис. ПЗ.1. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при  $w_2 = 0.48$  для процедур:

- Борда;
- МЭЭО-ММП на порядковой шкале;
- МЭЭО-ММП на РК-шкале;
- Сысоева-Чирко-Десятова;
- адаптивной Терстоуна-Мостеллера

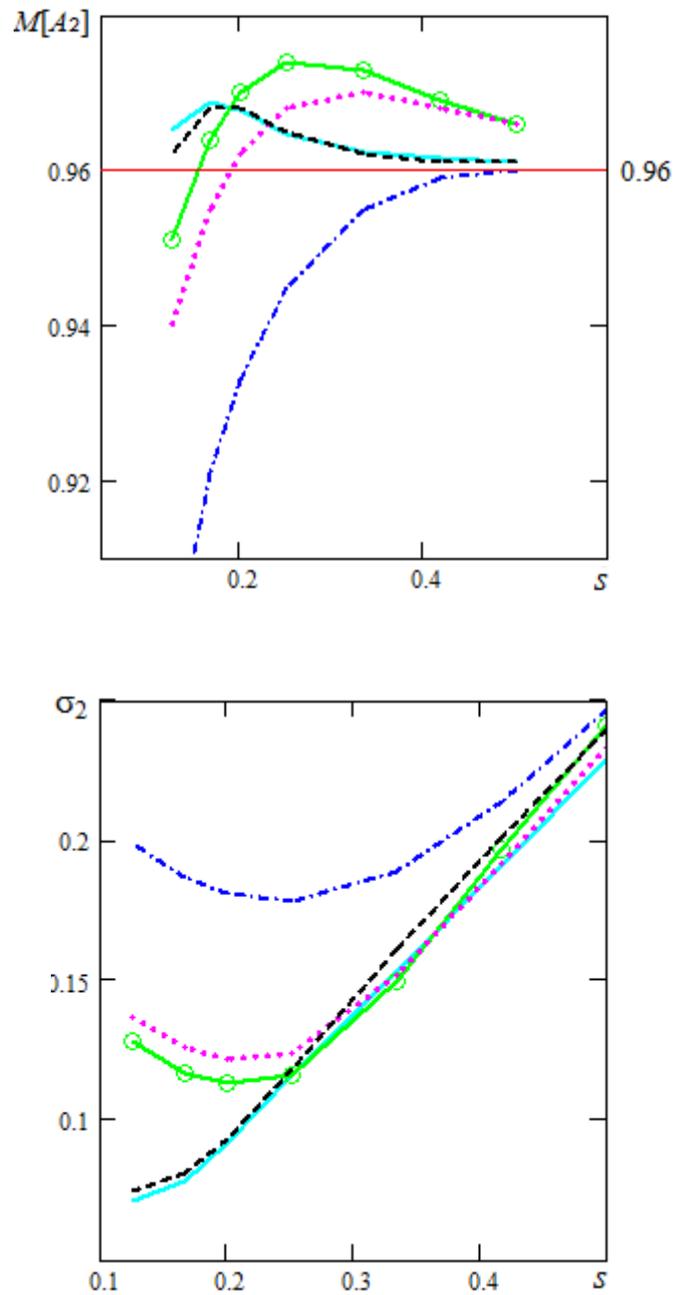


Рис. ПЗ.2. Зависимость  $M[A_2]$  и  $\sigma_2$  от  $s$  при  $w_2 = 0.96$  для процедур:

- Борда;
- ..... МЭЭО-ММП на порядковой шкале;
- МЭЭО-ММП на РК-шкале;
- Сысоева-Чирко-Десятова;
- адаптивной Терстоуна-Мостеллера

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4.

Структурные матрицы для всевозможных упорядочений выборки из четырёх альтернатив на порядковой шкале экспертного оценивания

$$C1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A1 > A2 > A3 > A4$$

$$C2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A1 > A2 > A4 > A3$$

$$C3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A1 > A3 > A2 > A4$$

$$C4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A1 > A3 > A4 > A2$$

$$C5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A1 > A4 > A2 > A3$$

$$C6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A1 > A4 > A3 > A2$$

$$C7 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A2 > A1 > A3 > A4$$

$$C8 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A2 > A1 > A4 > A3$$

$$C9 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A2 > A3 > A1 > A4$$

$$C10 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A2 > A3 > A4 > A1$$

$$C11 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A2 > A4 > A1 > A3$$

$$C12 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A2 > A4 > A3 > A1$$

$$C13 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A3 > A1 > A2 > A4$$

$$C14 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A3 > A1 > A4 > A2$$

$$C15 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A3 > A2 > A1 > A4$$

$$C16 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A3 > A2 > A4 > A1$$

$$C17 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A3 > A4 > A1 > A2$$

$$C18 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A3 > A4 > A2 > A1$$

$$C19 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A4 > A1 > A2 > A3$$

$$C20 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A4 > A1 > A3 > A2$$

$$C21 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A4 > A2 > A1 > A3$$

$$C22 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A4 > A2 > A3 > A1$$

$$C23 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A4 > A3 > A1 > A2$$

$$C24 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A4 > A3 > A2 > A1$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5.

Численный пример, демонстрирующий эффективность применения нелинейного МНК в качестве механизма оптимизации в процедуре Терстоуна-Мостеллера

Пусть имеется функция  $F(x) = 6.2 \cdot x - x^2 + 1$  и значения  $x = 0.5; 1.5; 2.5; 3.5; 4.5; 5.5$ .

При этом каждое из данных шести значений функции  $F(x)$  будем трактовать как величину полезности соответствующей альтернативы обучающей выборки  $X = (X_1, \dots, X_6)$  в МЭЭО. Порядковые номера альтернатив соответствуют возрастающим значениям  $x$ . Вследствие этого, «истинные» полезности альтернатив  $w = F(x)$  будут равны

$$w = (3.85 \quad 8.05 \quad 10.25 \quad 10.45 \quad 8.65 \quad 4.85)^T.$$

Следовательно, «истинное» результирующее упорядочение имеет вид:

$$X_4 \succ X_3 \succ X_5 \succ X_2 \succ X_6 \succ X_1.$$

Предположим, что имеется коллектив экспертов из шести человек ( $N = 6$ ). Проведём имитацию экспертного ранжирования альтернатив обучающей выборки. Для этого наложим погрешность на значения  $F(x)$ , и полученные численные полезности упорядочим по убыванию. Повторив подобную процедуру шесть раз, получим следующую матрицу результатов экспертного опроса на порядковой шкале оценивания

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

В матрице  $M$  каждый столбец соответствует  $r$ -му экспертному упорядочению ( $r = \overline{1, N}$ ) альтернатив обучающей выборки с указанием их порядко-

вых номеров по убыванию полезности. Каждое упорядочение полученного профиля  $M$  можно представить в виде соответствующей структурной матрицы:

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, C^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Значения  $f_j(x)$ ,  $j = \overline{1, 2}$  функций частных критериев в МЭЭО будем считать равными:  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = -x^2$ .

Таким образом, матрица оценок альтернатив по частным критериям качества будет выглядеть следующим образом:

$$Z = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1.5 & -2.25 \\ 2.5 & -6.25 \\ 3.5 & -12.25 \\ 4.5 & -20.25 \\ 5.5 & -30.25 \end{bmatrix}$$

Применив механизм нелинейного МНК в процедуре Терстоуна-Мостеллера, получим искомые значения оценок коэффициентов функции полезности МЭЭО:  $\widehat{b}_1 = 6.9574$ ;  $\widehat{b}_2 = 1.0871$ .

Таким образом, идентифицированная функция полезности имеет вид:

$$F^*(x) = 6.9574 \cdot x - 1.0871 \cdot x^2.$$

Восстановленная по результатам экспертного опроса на порядковой шкале оценивания функция полезности  $F^*$  определена с точностью до линейного преобразования  $(a \cdot F^* + c)$ ,  $a > 0$ . Подберём значения  $a$  и  $c$  так, чтобы добиться максимального совпадения графиков эталонной  $F(x)$  и восстановленной  $F^*(x)$  функций.

После масштабирования восстановленная функция полезности примет вид:

$$F^{**}(x) = 6.1091 \cdot x - 0.9546 \cdot x^2 + 0.5796.$$

Видно, что коэффициенты восстановленной функции  $F^{**}(x)$  достаточно хорошо совпадают с коэффициентами исходной функции полезности  $F(x)$ .

Оценки полезности альтернатив обучающей выборки согласно восстановленной ФП будут равны:

$$w^{**} = (3.40 \quad 7.60 \quad 9.89 \quad 10.27 \quad 8.74 \quad 5.3)^T.$$

В свою очередь, результирующее упорядочение примет вид

$$X_4 \succ X_3 \succ X_5 \succ X_2 \succ X_6 \succ X_1.$$

Таким образом (что существенно важно), восстановленная функция полезности  $F^{**}(x)$  упорядочивает альтернативы обучающей выборки идентично эталонной функции  $F(x)$ . На рис. П5.1 приведены графики эталонной и восстановленной функции полезности.

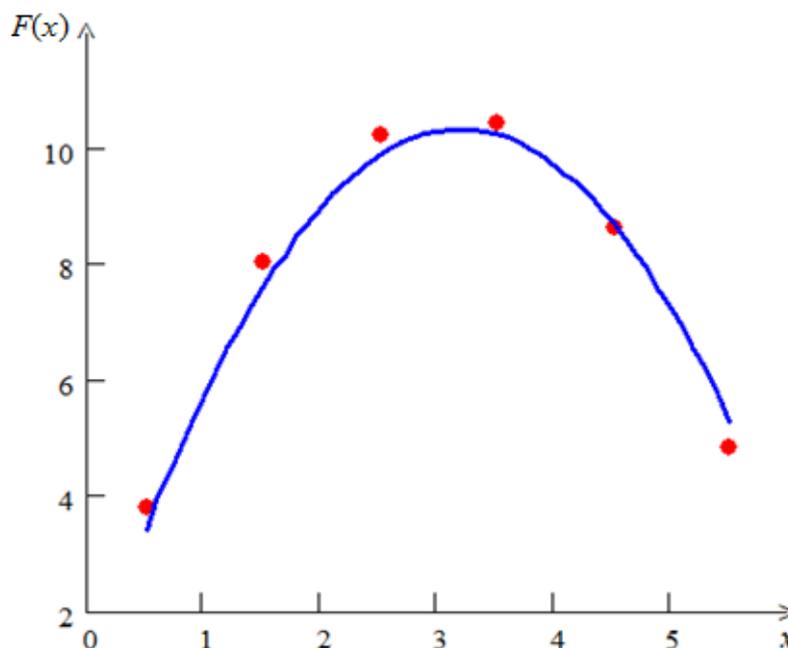


Рис. П5.1. Сравнение графиков эталонной функции и восстановленной с помощью нелинейной процедуры Терстоуна-Мостеллера:

••• эталонная функция; — восстановленная функция.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6.

## СПРАВКА

**об испытании программного обеспечения  
для системы поддержки принятия решений  
на предприятии по производству  
пельменей и полуфабрикатов КФХ «Борть»**

На предприятии КФХ «Борть» была апробирована система поддержки принятия решений (СППР), использующая адаптивную процедуру коллективного выбора на основе метода экстраполяции экспертных оценок (МЭЭО). При этом была внедрена программа для ЭВМ «Адаптивная система поддержки принятия решений на основе МЭЭО», разработанная сотрудниками ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий»: д.ф.-м.н. Бугаевым Ю. В., аспирантом Бабаяном М. К.

Конкретным случаем применения СППР послужило принятие коллективного решения по расширению ассортимента выпускаемой продукции. Исходные условия: 5 экспертов (начальники подразделений), 6 альтернатив (виды и сорта продукции), 5 показателей качества, характеризующих альтернативы.

Преимуществом разработанного программного продукта является возможность его адаптации к: а) виду шкалы экспертного оценивания (порядковая и/или разностно-классификационная); б) структуре заданного профиля экспертных предпочтений; в) противоречивости экспертных ранжирований. Еще одним достоинством данной СППР является наличие блока регуляризации рассматриваемого множества альтернатив, который обеспечивает устойчивость решения, полученного на основе разработанной адаптивной процедуры коллективного выбора.

Использование предложенного программного продукта позволило значительно повысить эффективность процесса принятия решений и сократило время его проведения.



Главный технолог  
предприятия КФХ «Борть»,

Балахонова М. Ю.

«11» июня 2015 г.



УТВЕРЖДАЮ  
Глава предприятия  
КФХ «Бортъ»

*Бородкин* Бородкин Н. В.  
«1» июня 2015 г.

### Акт о внедрении программного продукта

«Адаптивная система поддержки принятия решений на основе МЭЭО»

Созданное сотрудниками ФГБОУ ВПО ВГУИТ: профессором Бугаевым Ю. В., аспирантом Бабаяном М. К. программное обеспечение используется в практической деятельности предприятия по производству пельменей и полуфабрикатов КФХ «Бортъ» и применяется при решении сложных управленческих задач выбора.

Акт подписали

от ВГУИТ:

проф. каф. ИТМиУ, д.ф.-м.н.

Бугаев Ю. В.

аспирант каф. ИТМиУ

Бабаян М. К.



от КФХ «Бортъ»:

Главный технолог

Балахонова М. Ю.